OSNOVNI POJMOVI

- ***Faktorijel*** nekog prirodnog broja je proizvod svih prirodnih brojeva koji su manji ili jednaki njemu.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

  Dakle, kada treba da izračunamo faktorijel nekog broja samo pomnožimo sve prirodne brojeve od 1 do tog broja.
  Izračunati: $4!$, $6!$

- ***Binomni koeficijent*** potiče iz formule za razvijanje prirodnog stepena binoma.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

  Izračunati: $\binom{5}{2}$, $\binom{8}{6}$, $\binom{12}{0} + \binom{15}{1} - \binom{11}{9}$

  Osobine:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

KOMBINATORIKA

Kombinatorika nam daje odgovor na pitanje na koliko načina možemo da izaberemo elemente nekog skupa. Dakle, imamo neki skup, iz njega izdvajamo podskupove i brojimo ih. Da bismo utvrdili da li je u pitanju *permutacija*, *varijacija* i *kombinacija* potrebno je da odgovorimo na pitanja:

1. Da li su izabrani ***svi elementi*** početnog skupa?
2. Da li je ***poredak*** izabranih elemenata ***bitan***?

	Permutacije	***Varijacije***	***Kombinacije***
1.	*da*	*ne*	*ne*
2.	*da*	*da*	*ne*

Permutacije, varijacije i kombinacije mogu biti:

- ***bez ponavljanja*** svi elementi u početnom skupu su različiti,
- ***sa ponavljanjem*** neki elementi iz početnog skupa mogu da se javljaju. više puta

- ***<u>Permutacije</u>***

  * Imamo 3 knjige iz verovatnoće, statistike i matematike koje treba da stavimo na policu. Na koliko načina možemo da ih poređamo?

  * Imamo 3 iste knjige iz verovatnoće, 2 iz statistike i 1 iz matematike koje treba da stavimo na policu. Na koliko načina možemo da ih poređamo?

  – ***Permutacije bez ponavljanja:*** svi elementi skupa $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ se raspored uju u uređenu n-torku. Broj ovakvih rasporeda je

$$P_n = n!$$

- ***Permutacije sa ponavljanjem:*** iz skupa $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ se bira n_1 puta element a_1, n_2 puta element a_2,...,n_k puta element a_k i izabrani elementi se svrstavaju u uređenu n-torku onim redom kojim su birani. Ovakvih izbora ima
$$\bar{P}^n_{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$
pri čemu je $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

- ***<u>Varijacije</u>***

  * Zaboravili smo šifru na koferu. Znamo da se sastoji od 3 broja od 0 do 9 i da se:
  (a) brojevi ne ponavljaju
  (b) brojevi se ponavljaju
  Koliko ukupno ima mogućnosti šifara da bi bili sigurni da ćemo otvoriti kofer?

  - ***Varijacije bez ponavljanja:*** iz skupa $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ se $k \leq n$ puta bira neki element tako da svi izabrani elementi budu različiti (prethodno izabrani element se ne bira ponovo), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku. Ovakvih izbora raspoređivanja ima
$$V^n_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$$

  - ***Varijacije sa ponavljanjem:*** iz skupa $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ se k puta bira neki element tako da se svaki put element bira iz celog skupa A(prethodno izabrani elementi se mogu ponovo izabrati), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku. Ovakvih izbora raspoređivanja ima
$$\overline{V}^n_k = n^k$$

- ***<u>Kombinacije</u>***

  * Na koliko načina se iz špila od 52 karte može izvući 6 karata?

  - ***Kombinacije bez ponavljanja:*** iz skupa $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ se bira podskup od $k \leq n$ elemenata. Ovakvih podskupova ima
$$C^n_k = \binom{n}{k}$$

  - ***Kombinacije sa ponavljanjem:*** iz skupa $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ se bira podskup u kome se elementi mogu ponavljati, ali tako da ukupno elemenata sa ponavljanjima bude k. Ovakvih izbora ima
$$\overline{C}^n_k = \binom{n+k-1}{k}$$

<u>Zadaci:</u>

1. Koliko se različitih reči može napisati od slova S, T, A, T, I, S, T, I, K, A?
$$\bar{P}^{10}_{2,3,2,2,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 75.600$$

2. Na koliko načina se može izabrati 4 knjige iz kolekcije od 12 različitih knjiga?
$$C^{12}_4 = \binom{12}{4} = 495$$

3. Na koliko načina se kolekcija od 12 različitih knjiga može složiti na policu?
$$P_{12} = 12! = 479.001.600$$

4. U društvu na proslavi diplomiranja se nalazi 10 prijatelja. Oni nazdravljaju prijatelju i dolazi do kucanja čašama. Koliko će ukupno biti kucanja čašama, pri tom činu, ako se svako kod nazdravljanja kucne sa svakim?
$$C^{10}_2 = \binom{10}{2} = 45$$

5. Napisati sve dvocifrene prirodne brojeve koji se mogu napisati od cifara $1,2,3,4$ tako da se u jednom broju
   (a) ne mogu nalaziti iste cifre
$$V_2^4 = \frac{4!}{2!} = \binom{4}{2} 2! = 12$$
   (b) mogu nalaziti iste cifre
$$\overline{V}_2^4 = 4^2 = 16$$
6. Na koliko različitih načina učesnik u igri "Loto 7/39"može popuniti listić?
$$C_7^{39} = \binom{39}{7} = 15.380.937$$
7. U grupi za Verovatnoću i statistiku je 30 studenata. Na koliko načina 8 studenata može sedeti u prvom redu?
$$V_8^{30} = \frac{30!}{22!} = \binom{30}{8} 8! = 235.989.936.000$$
8. Koliko ima četvorocifrenih brojeva u kojima su
   (a) sve cifre različite
$$V_1^9 \cdot V_3^9 = 4.536$$
   ili
$$V_4^{10} - V_3^9 = 4.536$$
   (b) cifre ne moraju biti različite
$$9 \cdot \bar{V}_3^{10} = 9.000$$
   ili
$$\bar{V}_4^{10} - \bar{V}_3^{10} = 9.000$$
9. Koliko različitih petocifrenih brojeva može da se napiše od cifara $1,1,1,2,2$?
$$\bar{P}_{3,2}^5 = 10$$
10. Od Zrenjanina do Beograda ima 6 različitih puteva. Na koliko načina možemo iz Zrenjanina otići do Beograda i vratiti se nazad ako se:
   (a) možemo vratiti istim putem kojim smo došli
$$\bar{V}_2^6 = 36$$
   (b) ne možemo vratiti istim putem kojim smo došli
$$V_2^6 = 30$$
11. Koliko različitih bacanja daju tri kockice za igru?
$$\bar{V}_3^6 = 216$$
12. Na koliko načina u kafiću za sto sa 4 stolice mogu da sednu 4 osobe?
$$P_4 = 4! = 24$$
13. Koliko se različitih reči može napisati od slova K, Nj, I, G, A, ako se slova ne ponavljaju?
$$P_5 = 5! = 120$$
14. Na koliko načina se iz špila od 52 karte može izvući 6 karata tako da među njima bude:
   (a) tačno 3 kralja
$$C_3^4 \cdot C_3^{48} = 4 \cdot 17296 = 69.184$$
   (b) bar 3 kralja
$$C_3^4 \cdot C_3^{48} + C_4^4 \cdot C_2^{48} = 69.184 + 1.128 = 70.312$$
   (c) najviše 3 kralja
$$C_3^4 \cdot C_3^{48} + C_2^4 \cdot C_4^{48} + C_1^4 \cdot C_5^{48} + C_0^4 \cdot C_6^{48} = 69.184 + 1.167.480 + 6.849.216 + 12.271.512 = 20.357.392$$
15. Na koliko načina se od 30 studenata članova Studentskog parlamenta može izabrati tročlana delegacija koja će predstavljati studente na sednicama Veća?
$$C_3^{30} = \binom{30}{3} = 4.060$$

16. Na koliko načina se od 30 studenata članova Studentskog parlamenta može izabrati tročlana delegacija koja će predstavljati studente na sednicama Veća u sastavu predsednik, zamenik predsednika i sekretar?

$$V_3^{30} = 24.360$$

17. Na koliko različitih načina je moguće izvaditi 5 crvenih i 4 plave kuglice iz kutije u kojoj se nalazi 9 crvenih i 6 plavih kuglica?

$$C_5^9 \cdot C_4^6 = 126 \cdot 15 = 1.890$$

18. Neka su data četiri jednaka elementa (kvadra) Lego kocki različitih boja (crveni, žuti, plavi i beli). Koliko je različitih tornjeva moguće složiti upotrebljavajući svaki element tačno jednom?

$$P_4 = 4! = 24$$

19. Koliko može biti registrovanih automobila u opštini Zrenjanin, ako su na registarskoj tablici prva tri mesta brojevi a preostala dva slova?

$$\bar{V}_3^{10} \cdot \bar{V}_2^{33} = 1000 \cdot 1.089 = 1.089.000$$

20. Koliko ima parnih četvorocifrenih brojeva koji počinju cifrom 5?

$$5 \cdot V_2^{10} = 5 \cdot 100 = 500$$

PROSTOR DOGAĐAJA

- ***Skup elemantarnih događaja*** (Ω) je skup svih mogućih ishoda eksperimenta.
- ***Elementarni događaj*** (ω) je element skupa Ω tj. svaki mogući pojedinačni ishod eksperimenta.
  Dakle,
  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$
- ***Događaj*** (A) je svaki podskup skupa Ω i sastoji se od elementarnih događaja koji imaju svojstvo kojim se A definiše.
  - ***Siguran događaj*** (Ω) se mora dogoditi pri vršenju eksperimenta.
  - ***Nemoguć događaj*** ($\emptyset$) se nikada ne može dogoditi.
- ***Potpun sistem događaja***
  $$A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$$
  $$A_iA_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

Relacije i operacije koje važe u teoriji skupova, važe i nad skupom događaja.

- ***Unija događaja*** ($A \cup B$) - realizovao se bar jedan od događaja A i B.
  Ako su događaji ***disjunktni*** - isključuju se tj. ne mogu se realizovati istovremenio ($A \cap B = \emptyset$) koristi se oznaka $A + B$ i znači da se realizovao tačno jedan od disjunktnih događaja.
- ***Presek događaja*** ($A \cap B = AB$) - realizovala su se oba događaja A i B
- ***Razlika događaja*** ($A \setminus B$)- realizovao se događaj A ali ne i B.
- ***Suprotan događaj*** ($\bar{A}, A^C$) $\Omega \setminus A = \bar{A}$ - realizuje se kada se ne realizuje A.
- ***Implikacija događaja*** ($A \subset B$) - realizacija događaja A povlači (implicira) događaj B.
  Ako za događaje A i B važi da je $A \subset B$ i $B \subset A$ onda su događaju A i B ***identični*** $A = B$.

<u>Zadaci:</u>

1. Eksperiment se sastoji od bacanja kockice za igru.
   Posmatrajmo događaje:
   A - ”pri bacanju je dobijen paran broj”
   B - ”pri bacanju je dobijen neparan broj”
   C - ”pri bacanju je dobijen broj veći od 4”

   (a) napisati skup elementarnih događaja Ω,
   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
   (b) napisati događaje A, B i C kao skupove elementarnih događaja
   $$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{1, 3, 5\} \qquad C = \{5, 6\}$$
   (c) koji su parovi događaja disjunktni?
   $$AiB$$

2. Navesti skup elementarnih događaja za sledeće eksperimente:

   (a) bacanje kockice za igru dva puta
   $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$
   Dakle, $\bar{V}_2^6 = 6^2 = 36$

   (b) bacanje tri novčića
   $$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP\}$$
   Dakle, $\bar{V}_2^3 = 2^3 = 8$

   (c) bacanje kockice za igru i jednog novčića
   $$\Omega = \{1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P, 1G, 2G, 3G, 4G, 5G, 6G\}$$

(d) registrovanje ispravnosti četiri prekidača za struju

$$\Omega = \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0011, 0110, 0101, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111\}$$

3. Meta se gađa sa 3 metka. Neka je X_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ događaj "i- tim metkom je meta pogođena". Pomoću događaja X_i i $\bar{X}_i$ izraziti događaje:

* A - "ostvarena su 3 pogotka"

$$A = \{X_1X_2X_3\}$$

* B - "ostvarena su 3 promašaja"

$$B = \{\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\}$$

* C - "ostvaren je bar 1 pogodak"

$$C = \{X_1X_2X_3, \bar{X}_1X_2X_3, X_1\bar{X}_2X_3, X_1X_2\bar{X}_3, X_1\bar{X}_2\bar{X}_3, \bar{X}_1X_2\bar{X}_3, \bar{X}_1\bar{X}_2X_3\}$$

* D - "ostvaren je bar 1 promašaj"

$$D = \bar{A}$$

* E - "ostvaren je najviše 1 promašaj"

$$E = \{X_1X_2X_3, \bar{X}_1X_2X_3, X_1\bar{X}_2X_3, X_1X_2\bar{X}_3\}$$

* F - "ostvarena su najviše 2 promašaja"

$$F = \bar{E}$$

4. Ana, Branko, Ceca i Darko polažu ispit. Ako sa A, B, C i D označimo događaje da su studenti položili ispit, respektivno. Izraziti sledeće događaje:

* E - "nijedan student nije položio ispit"

$$E = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

* F - "Branko je samo položila ispit"

$$F = \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$$

* G - "jedan student je samo položio ispit"

$$G = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$$

* H - "bar jedan student je položio ispit"

$$H = \Omega \setminus \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} = \Omega \setminus E = \bar{E}$$

* I - "najviše dva studenta su položila ispit"

$$I = E + G + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D$$

* J - "najviše četiri studenta su položila ispit"

$$J = \Omega$$

5. Baca se kockica za igru i posmaraju se događaji:
A - "na kockici je pao broj manji od 4"
B - "na kockici je pao paran broj"
C - "na kockici je pao broj koji nije manji od 5"
Navesti od kojih se elementarnih događaja sastoje i rečima opisati događaje: $A \cup B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cup B \cup C$, $\bar{C}$, $\bar{B}$, $A \cup (B \cap \bar{C})$

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 4, 6\}, \qquad C = \{5, 6\}$$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ - "pao je broj različit od 5"
$B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$ - "pao je broj različit od 1 i 3"
$B \cap C = \{6\}$ - "pao je broj 6"
$A \cap C = \emptyset$ - nemoguć događaj
$A \cup B \cup C = \Omega$ - siguran događaj
$\bar{C} = \{1, 2, 3, 4\}$ - "pao je broj manji od 5"
$\bar{B} = \{1, 3, 5\}$ - "pao je neparan broj"
$A \cup (B \cap \bar{C}) = \{1, 2, 3, 4\}$ - "pao je broj različit od 5 i 6"

6. Rečima iskazati suprotne događaje događajima:

   * A - "pojava dva pisma pri bacanju dva novčica"

   $$\bar{A} \text{ - "pojava bar jednog grba"}$$

   * B - "pojava bele kuglice prilikom izvlačenja jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele, 3 crne i 4 crvene kuglice"

   $$\bar{B} \text{ - "pojava crne ili crvene kuglice"}$$

   * C - "pet promašaja od pet gađanja"

   $$\bar{C} \text{ - "bar jedan pogodak"}$$

   * D - "bar jedan pogodak u pet gađanja"

   $$\bar{D} \text{ - "pet promašaja"}$$

   * E - "ne više od tri pogotka u pet gađanja"

   $$\bar{E} \text{ - "više od tri pogotka"}$$

7. U prodavnici se nalaze majice od dva proizvođača. Događaj da je slučajno izabrana majica od prvog proizvođača se obeležava sa F, a da je dobrog kvaliteta sa Q. Šta znače sledeći događaji?

$$\bar{F}, \quad F + \bar{F}, \quad F\bar{F}, \quad FQ, \quad F + Q, \quad F\bar{Q}, \quad \bar{F}Q$$

$\bar{F}$ - majica je od drugog proizvođača
$F + \bar{F}$ - majica je od prvog ili drugog proizvođača
$F\bar{F}$ - nemoguć događaj
FQ - majica je od prvog proizvođača i dobrog je kvaliteta
$F + Q$ - majica je od prvog proizvođača ili dobrog je kvaliteta
$F\bar{Q}$ - majica je od prvog proizvođača i nije dobrog je kvaliteta
$\bar{F}Q$ - majica je od drugog proizvođača i dobrog je kvaliteta

8. Neka je $A \subset B$. Uprostiti izraze : AB, $A + B$, ABC, $A + B + C$.

$$AB = A$$

$$A + B = B$$

$$ABC = AC$$

$$A + B + C = BC$$

9. Dokazati da događaji AB, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, $\bar{A}\bar{B}$ obrazuju potpun sistem događaja ako su A i B proizvoljni događaji.

$$AB + \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = B(A + \bar{A}) + \bar{B}(A + \bar{A}) = B + \bar{B} = \Omega$$

$$AB \cdot \bar{A}B = \emptyset$$

$$AB \cdot A\bar{B} = \emptyset$$

$$AB \cdot \bar{A}\bar{B} = \emptyset$$

$$\bar{A}B \cdot A\bar{B} = \emptyset$$

$$\bar{A}B \cdot \bar{A}\bar{B} = \emptyset$$

$$A\bar{B} \cdot \bar{A}\bar{B} = \emptyset$$

VEROVATNOĆA

- ***Definicija verovatnoće***
  Za svaki događaj $A \subseteq \Omega$ neka je $P(A)$ realan broj takav da važe sledeće osobine:
  (i) $P(\Omega) = 1$,
  (ii) Za sve $A \subseteq \Omega$, $P(A) \geq 0$,
  (iii) Ako je $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ konačan skup međusobno disjunktnih događaja, tada je
  $$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n),$$
  Ako je $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$ prebrojiv skup međusobno disjunktnih događaja, tada je
  $$P(\Sigma_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$
  Broj $P(A)$ nazivamo verovatnoćom događaja A,$A \subseteq \Omega$.

  Osobine verovatnoće
  1. $P(\emptyset) = 0$
  2. Ako je $A \subseteq B$, tada je $P(A) \leq P(B)$
  3. Ako je A događaj, tada je $0 \leq P(A) \leq 1$
  4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
  5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

- ***Laplasova definicija verovatnoće***
  Ako je zadovoljeno:
  1.) skup svih elementarnih ishoda je konačan - npr. neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$,
  2.) elementi se biraju na slučajan način tj. svi elementarni ishodi su jednako verovatni$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ...P(\omega_n) = \frac{1}{n}$,

  tada je verovatnoća nekog događaja $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega$
  $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}$$
  * količnik broja "povoljnih elementarnih ishoda"(k) i "ukupnog broja elementarnih ishoda"(n).

- ***Geometrijska definicija verovatnoće***
  Ako je zadovoljeno:
  1.) skup svih mogućih elementarnih ishoda, kao i događaj A čija se verovatnoća izračunava se mogu predstaviti kao merljive geometriske oblasti,
  2.) elementi skupa Ω se biraju na slučajan način tj. ravnopravan je izbor svake tačke,

  tada je verovatnoća nekog događaja A
  $$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$
  gde je sa $m(A)$ označena mera (dužina, površina ili zapremina) oblasti koja odgovara događaju A, a sa $m(\Omega)$ mera oblasti koja odgovara skupu Ω svih elementarnih ishoda.

Zadaci:

1. Bacamo 3 novčića. Naći verovatnoću da ćemo dobiti 2 grba i 1 pismo.
$$P(A) = \frac{1}{2^3} = 0.125$$

2. Svako od slova A, G, I, K, Nj je zapisano na po jedan listić papira koji se nasumice ređaju u niz. Izračunati verovatnoću da će se na ovaj način formirati reč KNjIGA.
$$P(A) = \frac{1}{5!} = 0.008\bar{3}$$

3. U televizijskom kvizu *Slagalica* računar je sa spiska reči formiranih pomoću slova A, A, I, I, K, S, S, T, T, T odabrao jednu. Izračunati verovatnoću da je odabrana reč STATISTIKA.

$$P(A) = \frac{1}{\frac{10!}{2!2!1!2!3!}} = 0.000013$$

4. Bacaju se dve kockice za igru. Da li je verovatnije da će na kockicama pasti jednaki brojevi ili da je zbir brojeva 6.
A - "na kockicama su pali jednaki brojevi" B - "zbir palih brojeva je 6"

$$P(A) = \frac{6}{6^2} = 0.1\bar{6}$$

$$P(A) = \frac{5}{6^2} = 0.13\bar{8}$$

Dakle, kako je $P(A) > P(B)$ verovatnije je da će na kockicama pasti jednaki brojevi.

5. Bacaju se dve kockice za igru. Izračunati verovatnoću sledećih događaja:

   * A - "zbir palih brojeva je deljiv sa 3"
   $$P(A) = \frac{12}{36} = 0.\bar{3}$$
   * B - "zbir palih brojeva nije deljiv sa 2"
   $$P(B) = \frac{1}{2} = 0.5$$
   * C - "kvadratni koren zbira palih brojeva je ceo broj"
   $$P(C) = \frac{7}{36}$$

6. Od 10 boca mleka u frižideru, 7 je ispravno, dok je ostalima istekao rok trajanja. Nasumice se bira 5 boca mleka. Kolika je verovatnoća da će međ u izvučenim bocama biti 3 kojima nije istekao rok trajanja?

$$p = \frac{C_3^7 \cdot C_2^3}{C_5^{10}} = \frac{105}{252} = 0.41\bar{6}$$

7. Od brojeva 1,2,3,4 računar formira četvorocifrene brojeve kod kojih se cifre ne ponavljaju i odabira jedan. Izračunati verovatnoću da je odabrani broj deljiv sa 4.

$$p = \frac{3 * 2!}{4!} = 0.25$$

8. Iz kutije u kojoj se nalazi 10 crvenih, 8 plavih i 7 belih kuglica se izvlači jedna kuglica. Odrediti verovatnoću da izvučena kuglica:

   (a) bude crvena
   $$P(A) = \frac{10}{25} = 0.4$$
   (b) bude plava ili bela
   $$P(B) = \frac{8}{25} + \frac{7}{25} = 0.6$$
   (c) nije plava
   $$P(C) = 1 - \frac{8}{25} = 0.68$$

9. Meta se sastoji iz 3 zone čija je verovatnoća pogađanja redom 0.10, 0.20 i 0.30. Koja je verovatnoća da se pri gađanju meta promaši?

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.1 \cdot \ 0.2 \cdot 0.3 = 0.994$$

10. Na ispitu od 30 ispitnih pitanja student dobija 3. Ako je naučio 20 ispitna pitanja, kolika je verovatnoća da će:

   (a) položiti ispit, odnosno odgovoriti na sva 3 pitanja
   $$P(A) = \frac{C_3^{20}}{C_3^{30}} = \frac{1140}{4060} = 0.281$$
   (b) dobiti jedno pitanje na koje ne zna odgovor
   $$P(B) = \frac{C_2^{20} \cdot C_1^{10}}{C_3^{30}} = \frac{1900}{4060} = 0.468$$

(c) dobiti najviše dva pitanja na koja ne zna odgovor

$$P(C) = 1 - \frac{C_0^{20} \cdot C_3^{10}}{C_3^{30}} = 1 - \frac{120}{4060} = 0.9704$$

11. Telefonski broj se sastoji od 6 cifara. Koja je verovatnoća da u proizvoljno izabranom broju sve cifre budu različite?

$$P(A) = \frac{V^{10_6}}{\bar{V}^{10_6}} = 0.1512$$

12. Iz špila od 52 karte se nasumice izvlače 4 karte. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:

* A - "izvučena su 4 kralja"

$$P(A) = \frac{C_4^4 \cdot C_0^{48}}{C_4^{52}} = \frac{1}{270725} = 0.00000369$$

* B - "izvučena su bar 3 kralja"

$$P(B) = P(A) + \frac{C_3^4 \cdot C_1^{48}}{C_4^{52}} = \frac{193}{270725} = 0.00071$$

* C - "izvučena su najviše 3 kralja"

$$P(C) = 1 - P(A) = \frac{270724}{270725} = 0.99999631$$

* D - "izvučeni su kralj, kec, desetka i šestica"

$$P(D) = \frac{C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4}{C_4^{52}} = \frac{256}{270725} = 0.00094561$$

13. U kvadrat je upisan krug. Izračunati verovatnoću da će slučajno izabrana tačka kvadrata biti van kruga.

14. U krug je upisan kvadrat. Izračunati verovatnoću da će slučajno izabrana tačka u krugu biti i u kvadratu.

- ***Verovatnoća unije događaja*** koji

  - ***su disjunktni***

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)$$

  - ***nisu disjunktni***

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

  Disjunktni događaji su događaji koji se isključuju, odnosno $A \cap B = \emptyset$.

- ***Uslovna verovatnoća*** događaja A pod uslovom da se ostvario događaj B

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

  za $P(B) > 0$. Verovatnoća događaja A, znajući da se događaj B već realizovao ili pretpostavljajući da će se realizovati, naziva se *uslovna verovatnoća.*

- ***Zavisni događaji***

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

- ***Nezavisni događaji***

$$P(A|B) = P(A), \qquad P(B|A) = P(B) \qquad P(AB) = P(A)P(B)$$

  Dakle, za dati skup elementarnih događaja Ω i $A, B \subset \Omega$ događaj A je *zavisan* od događaja B, ako ostvarivanje događaja B utiče na verovatnoću događaja A, a u suprotnom su *nezavisni.* Treba praviti razliku između nezavisnosti i disjunktnosti. Nezavisni događaji se definišu nad Ω, za razliku od disjunktnosti koja postoji nezavisno od definicije verovatnoće.

- ***Formula totalne verovatnoće***
  Za događaj A i potpun sistem događaja $H_1, H_2, ..., H_n$ važi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

  ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

  Neka nezavisni događaji $H_1, H_2, ..., H_n$ čine jedno razlaganje skupa Ω (***potpun sistem događaja***), odnosno $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, gde su verovatnoće $P(H_i)$ unapred poznate. Da bismo odredili verovatnoću događaja A potrebno je odrediti uslovne verovatnoće $P(A|H_i)$.

- ***Bajesova formula***
  Za događaj A i potpun sistem događaja $H_1, H_2, ..., H_n$ važi

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}$$

  za svako $k \in \{1, 2, .., n\}$,ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

<u>Zadaci:</u>

1. Bacamo kockicu za igru. Kolika je verovatnoća da dobijemo broj koji je deljiv sa 3 ili sa 4?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 0.5$$

2. Bacamo kockicu za igru. Kolika je verovatnoća da dobijemo broj koji je deljiv sa 2 ili sa 3?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = 0.\bar{6}$$

3. Iz špila od 52 karte izvlačimo jednu kartu. Kolika je verovatnoća da ćemo izvući keca ili tref?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = 0.31$$

4. Dva strelca gađaju metu. Verovatnoća da prvi pogodi centar je 0.5, a drugi 0.6. Obojica istovremeno gađaju metu. Kolika je verovatnoća da će centar mete biti pogođen?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.5 \cdot 0.6 = 0.8$$

5. Novčic bacamo 3 puta. Neka su događaji:

   * A - "grb je pao jednom"
   * B - "pismo je palo najmanje jednom"
   * C - "prvi put je pao grb, a nakon toga dva pisma"

   Izračunati: $P(A \cup B \cup C)$.

   $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$$

6. Ispit iz verovatnoće i statistike se sastoji iz dva kolokvijuma. Verovatnoća da će student položiti bar jedan kolokvijum je 0.5, da položi oba kolokvijuma je 0.1 i verovatnoća da položi prvi kolokvijum je 0.25. Izračunati verovatnoće događaja:

   * A - "student će položiti drugi kolokvijum"
   * B - "student će položiti samo drugi kolokvijum"
   * C - "student će položiti tačno jedan kolokvijum"
   * D - "student neće položiti nijedan kolokvijum"

   Označimo sa:
   x - verovatnoću da je student položio oba kolokvijuma
   y - verovatnoću da je student položio samo prvi kolokvijum
   z - verovatnoću da je student položio samo drugi kolokvijum
   u - verovatnoću da student nije položio nijedan kolokvijuma
   Ako su događaji A_i - študent je položio i - ti kolokvijum"onda

   $$P(A_1 \cup A_2) = x + y + z = 0.5$$
   $$P(A_1) = x + y = 0.25$$
   $$P(A_1 \cap A_2) = x = 0.1$$

   Dakle,

   $$P(A) = x + z = 0.35$$
   $$P(B) = z = 0.25$$
   $$P(C) = y + z = 0.4$$
   $$P(D) = u = 1 - 0.5 = 0.5$$

7. Na jednom smeru od 30 studenata,20 je na budžetu, 15 prima stipendiju od mesta iz kog dolazi, a 10 je na budžetu i prima stipendiju. Koja je verovatnoća da slučajno izabrani student prima stipendiju, ako znamo da je na budžetu?

8. Kolika je verovatnoća da na kockici za igru padne neparan broj, pod uslovom da je taj broj manji od 5?

   $$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = 0.5$$

9. U kutiji se nalazi 6 crvenih i 4 plave kuglice. Izvlačimo 2 kuglice, jednu po jednu, bez vraćanja. Koja je verovatnoća da druga izvučena kuglica plava, ako znamo da je prvo izvučena crvena kuglica?

   $$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{10}\frac{4}{9}}{\frac{6}{10}} = 0.\bar{4}$$

10. Novčić se baca ili do pojave pisma ili do tri uzastopne pojave grba. Pod uslovom da je rezultat prvog bacanja grb, naći verovatnoću da je novčić bačen 3 puta.

    $$\Omega = \{P, GP, GGP, GGG\}$$

    A - đinar se baca 3 puta"B - "rezultat prvog bacanja je grb"

    $$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{2}{8}} = 0.5$$

11. Na tanjiriću se nalazi 4 rafaelo kuglice i 5 krem bananica. Ana svaki put na slučajan način bira jedan slatkikoji pojede. Izračunati verovatnoću da će Ana prvo pojesti sve rafaelo kuglice.

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)P(A_4 \mid A_1A_2A_3)P(A_5 \mid A_1A_2A_3A_4) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = 0.08$$

12. Bacamo 2 novčića. Neka su događaji:

   * A - "pojava pisma na prvom novčiću"
   * B - "pojava makar jednog grba"
   * C - "pojava makar jednog pisma"
   * D - "pojava pisma na drugom novčiću"

   Ispitati zavisnost događaja

   (a) A i C
   A i C su zavisni
   (b) A i D
   A i D su nezavisni
   (c) B i C
   B i C su zavisni
   (d) B i D
   A i D su zavisni

13. Iz špila od 52 karte izvučene su dve karte. Naći verovatnoću da je oba puta izvučen kralj, ako je:

   (a) dozvoljeno vraćanje
   $$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = 0.006$$
   (b) nije dozvoljeno vraćanje
   $$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = 0.0045$$

14. U frižideru se nalazi 20 boca mleka od po litru, od kojih je 15 ispravno tj. nije im istekao rok trajanja. Nasumice uzimamo 2 boce mleka, prvo jednu pa drugu. Naći verovatnoću da ćemo odabrati 2 litre mleka kojima nije istekao rok trajanja.

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = 0.55$$

15. U kutiji se nalazi 6 crvenih i 4 plave kuglice. Izvlačimo 3 puta po jednu kuglicu iz kutije. Izračunati verovatnoću događaja A - "izvučena je bar jedna plava kuglica"

   (a) bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju $\bar{A}$- "nije izvučena nijedna plava kuglica"
   $$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = 1 - 0.1\bar{6} = 0.8\bar{3}$$
   (b) sa vraćanjem izvučene kuglice u kutiju
   $$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = 1 - 0.216 = 0.784$$

16. Student je izašao na ispit iz verovatnoće i statistike i dobio je 3 pitanja. Naučio je 20 od 30 pitanja. Naći verovatnoću da je student znao odgovor na sva 3 pitanja.

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = 0.28$$

17. Na ispit iz verovatnoće i statistike u januarskom roku izašlo je 90% studenata koji polažu prvi put i 10% starih studenata. Verovatnoća da će student koji polaže prvi put položiti ispit je 0.7, a za ostale 0.5. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrani student položiti ispit.

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = 0.9 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.68$$

18. Protivgradnim raketama gađa se oblak dva puta. U prvom gađanju verovatnoća pogotka je 0.3, a u drugom 0.6. Jednom pogođeni oblak se razbija sa verovatnoćom 0.4, a dva puta pogođen se uklanja sa verovatnoćom 0.9. Kolika je verovatnoća da se ukloni oblak?
$P(H_1) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.56$,
$P(H_2) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = 0.56 \cdot 0.4 + 0.18 \cdot 0.9 = 0.386$$

19. U maloj ispostavi fabrike nameštaja postoje 3 mašine koje proizvode 35%, 40% i 25% ukupne proizvodnje, respektivno. Na prvoj mašini se pojavljuje 2% škarta, na drugoj 2.5%, a na trećoj 3%. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrani proizvod biti škart?

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = 0.35 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.025 + 0.25 \cdot 0.03 = 0.0245$$

20. Student ide na fakultet peške, biciklom ili autobusom. U 20% slučajeva se opredeljuje da ide peške, u 50% slučajeva biciklom, a u 30% slučajeva za autobus. Verovatnoća da će zbog izbora da ide peške zakasniti na predavanje je 5%, 1% ako se odluči za bicikl, a 10% da će zakasniti zbog kašnjenja autobusa.

    (a) Izračunati verovatnoću sa kojom će student zakasniti na predavanje

    $$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.045$$

    (b) Ako je student zakasnio na predavanje, koliko iznosi verovatnoća da je on na predavanje došao biciklom?

    $$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0.005}{0.045} = 0.\bar{1}$$

21. Pretpostavimo da na tržištu Srbije postoje 3 velike tekstilne fabrike (male proizvođače ćemo zanemariti). Prva fabrika proizvodi dva puta više od druge, a druga i treća isto. Takođe znamo da je 4% proizvoda iz prve i druge fabrike sa greškom, a 3% iz treć e. Svi proizvodi se nalaze u istom skladištu prilikom izvoza robe. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrani proizvod biti:

    (a) sa greškom?

    $$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = 0.5 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.03 = 0.0375$$

    (b) iz prve fabrike, ako znamo da je sa greškom?

    $$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0.02}{0.0375} = 0.5\bar{3}$$

22. U poljoprivrednoj apoteci se nalaze semena dva instituta i to 65% je sa prvog instituta, a ostalo sa drugog. 4% semena iz prvog instituta je lošeg kvaliteta, a 6% iz drugog.

    (a) Odrediti verovatnoću da slučajni kupac kupi kvalitetno seme?

    $$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = 0.65 \cdot 0.04 + 0.35 \cdot 0.06 = 0.047$$

    $$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.953$$

    (b) Kolika je verovatnoća da je seme iz prvog instituta lošeg kvaliteta?

    $$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0.026}{0.047} = 0.55$$

SLUČAJNE PROMENLJIVE

- ***Slučajna promenljiva*** X je merljiva funkcija koja preslikava Ω u $\mathbb{R}$.
  Koristimo oznake:
  * Ω - *skup svih mogućih ishoda* jednog eksperimenta
  * $\Re_X$ - skup slika od X tj. *skup vrednosti* slučajne promenljive X

DISKRETNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- Slučajna promenljiva je ***diskretna*** ako je skup vrednosti *konačan* ili *prebrojiv*, odnosno $\Re_X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.
- ***Zakon raspodele*** slučajne promenljive X predstavlja skup vrednosti $\Re_X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama $p(x_i)$,$i = 1, 2, ..., n, ...$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p(x_1) & p(x_2) & ... & p(x_n) & ... \end{pmatrix}$$

- ***Funkciju raspodele*** slučajne promenljive X označavamo sa $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ i definišemo

$$F_x(X) = P(X < x)$$

- ***Numeričke karakteristike***
  - ***Matematičko očekivanje***

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$

Osobine:

$$E(c) = c \qquad c = const.$$

$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X) \qquad c = const.$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$X, Y \quad nezavisne \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

  - ***Disperzija***

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$ili$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Osobine:

$$D(c) = 0 \qquad c = const.$$

$$D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X) \qquad c = const.$$

$$D(X + c) = D(X) \qquad c = const.$$

$$X, Y \quad nezavisne \Rightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

- ***Primeri raspodela diskretnih slučajnih promenljivih***
  - ***Binomna raspodela*** $X : \mathcal{B}(n, p)$
    Slučajna promenljiva ima binomnu raspodelu $X : \mathcal{B}(n, p)$ sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$, ako je $\Re_X = \{0, 1, ..., n\}$ i odgovarajuće verovatnoće su

$$p(i) = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}.$$

Takođe,

$$E(X) = n \cdot p$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

– ***Poasonova raspodela*** $X : \mathcal{P}(\lambda)$
Slučajna promenljiva ima Poasonovu raspodelu $X : \mathcal{P}(\lambda)$ sa parametrom $\lambda > 0$, ako je $\Re_X = \{0, 1, 2, ...\}$ i odgovarajuće verovatnoće su
$$p(i) = P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \exp^{-\lambda}.$$

Takođe,
$$E(X) = \lambda$$
$$D(X) = \lambda$$

Napomena: Ako u binomnoj raspodeli $n \to \infty$, a $p \to 0$ tada teži Poasonovoj raspodeli sa parametrom λ. U zadacima proveravamo da li je $np \leq 10$.

– ***Geometrijska raspodela*** $X : \mathcal{G}(p)$
Slučajna promenljiva ima geometrijsku raspodelu $X : \mathcal{G}(p)$ sa parametrom $0 < p < 1$, ako je $\Re_X = \{1, 2, 3, ...\}$ i odgovarajuće verovatnoće su
$$p(i) = P(X = i) = p \cdot (1 - p)^{i-1}.$$

Takođe,
$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$D(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Zadaci:

1. Prilikom bacanja novčića registruje se broj palih grbova. Ukoliko novčić bacamo:
   (a) jednom
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$
   (b) dva puta
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{3}{4} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$
   (c) tri puta
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{8} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{4}{8} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{7}{8} & 2 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

   Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X i njenu funkciju raspodele. Grafički predstaviti.

2. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive koja predstavlja zbir brojeva koji se dobijaju prilikom bacanja dve kockice.
   Važi:
   $P(X = 2) = P(X = 12) = \frac{1}{36}$
   $P(X = 3) = P(X = 11) = \frac{2}{36}$
   $P(X = 4) = P(X = 10) = \frac{3}{36}$
   $P(X = 5) = P(X = 9) = \frac{4}{36}$
   $P(X = 6) = P(X = 8) = \frac{5}{36}$
   $P(X = 7) = \frac{6}{36}$
   Dakle,
$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & ... & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & ... & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

3. U kutiji se nalazi 4 crvene i 6 plavih kuglica. Izvlačimo dve kuglice. Odrediti zakon i funkciju raspodele slučajne promenljiv X koja predstavlja broj izvučenih plavih kuglica.
$P(X=0) = \frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45}$
$P(X=1) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45}$
$P(X=2) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45}$
Dakle,

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{45} & \frac{24}{45} & \frac{15}{45} \end{pmatrix}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{6}{45} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{30}{45} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

4. U kutiji se nalazi 4 crvene i 6 plavih kuglica. Izvlačimo kuglice do prvog pojavljivanja crvene kuglice. Odrediti raspodelu slučajne promenljiv X koja predstavlja broj izvlačenja kuglica.
$P(X=1) = \frac{4}{10} = \frac{2016}{5040}$
$P(X=2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{1344}{5040}$
$P(X=3) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \frac{840}{5040}$
$P(X=4) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{48}{5040}$
$P(X=0) = 1-(X=1)-(X=2)-(X=3)-(X=4) = 1-\frac{4248}{5040} = \frac{792}{5040}$

5. Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele:

$$X : \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 5 \\ 0.2 & 0.12 & 0.38 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Odrediti:

(a) $P(X<3)$, $P(1 \leq X < 5)$, $P(-3 < X \leq 3)$

$$P(X<3) = P(X=-3) + P(X=1) = 0.32$$
$$P(1 \leq X < 5) = P(X=1) + P(X=3) = 0.50$$
$$P(-3 < X \leq 3) = P(X=1) + P(X=3) = 0.50$$

(b) $F_X(-3)$, $F_X(3)$, $F_X(5)$

$$F_X(-3) = P(X < -3) = 0$$
$$F_X(3) = P(X<3) = P(X=-3) + P(X=1) = 0.32$$
$$F_X(5) = (X=-3) + P(X=1) + (X=-3) = 0.7$$

(c) Grafički predstaviti funkciju raspodele

6. Gradsko saobraćajno preduzeće ima pet operatera. Neka je X broj zauzetih operatera u određenom trenutku. Zakon raspodele za X dat je sa

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.25 & 0.15 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Izračunati:

(a) verovatnoće sledećih događaja
* A - "bar 4 operatera su zauzeta"

$$P(A) = P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = 0.4$$

* B - "manje od 3 operatera je zauzeto"

$$P(B) = P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.5$$

* C - "između 2 i 5 operatera je zauzeto"

$$P(C) = P(2 \leq X \geq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0.6$$

(b) $F_X(1.3)$, $F_X(3)$

$$F_X(1.3) = P(X < 1.3) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.4$$
$$F_X(3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5$$

7. Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Neka je $Y = 2X + 3$, $Z = X^2$. Odrediti:

(a) zakon raspodele za slučajne promenljive Y, Z
(b) matematičko očekivanje za slučajne promenljive X, Y, Z
(c) disperziju za slučajne promenljive X, Y, Z

8. Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti:

(a) verovatnoće $P(X < 0.5)$, $P(2X + 1 < 3)$, $P(X^2 < 1.2)$ i $P(2 - X < -1)$
(b) zakon raspodele za slučajne promenljive $Y = X^2$, $X^2 + 1$
(c) matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promenljive X, Y, Z

9. Dve mašine nezavisno jedna od druge proizvode istu vrstu proizvoda. Slučajna promenljiva X predstavlja broj škartova u toku jednog dana na prvoj mašini, a slučajna promenljiva Y broj škartova na drugoj mašini. Zakoni raspodela za X i Y su

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$
$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Odrediti:

(a) zakon raspodele za slučajne promenljive $Z = X + Y$, $T = X \cdot Y$
(b) matematičko očekivanje i disperziju za Z i T.

10. Kolika je verovatnoća da se u 10 uzastopnih bacanja novčića pojavi grb:

(a) četiri puta
(b) osam puta

11. U kružnom toku bude u proseku 3 automobila u minutu. Kolika je verovatnoća da u kružnom toku:

(a) neće biti vozila
(b) bude 10 vozila

12. Verovatnoća da je neki proizvod neispravan je 0.03. Ukoliko se iz skladišta slučajno izabere 300 proizvoda. Kolika je verovatnoća da bude

(a) 10 neispravnih proizvoda
(b) najviše 3 neispravna proizvoda

13. Strelac promašuje metu sa verovatnoćom $\frac{1}{20}$.

(a) Ako strelac gađa u metu 100 puta, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X koja predstavlja broj promašaja
(b) Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Y kojom se može aproksimirati slučajna promenljiva X iz ovog zadatka.
(c) Ako strelac gađa u metu dok ne promaši, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Z koja predstavlja broj gađanja.
(d) Strelac gađa metu dok ne promaši. Slučajna promenljiva T uzima vrednost 1 ako je strelac promašio metu u parnom po redu gađanju, a vrednost -1 ako je strelac promašio metu u neparnom po redu gađanju. Naći matematičko očekivanje i disperziju za slučajnu promenljivu T.