U okviru devetog dijela predavanja predviđeno je da studenti savladaju slijedeće programske sadržaje:

1. Pojam neodređenog integrala. Tablica osnovnih integrala.
2. Metoda smjene (supsitucije) za izračunavanje neodređenog integrala.
3. Metoda parcijalne integracije.
4. Integracija racionalnih funkcija.

IX. 1. Pojam neodređenog integrala. Tablica osnovnih integrala.

IX.1.1. Definicija i osnovne osobine neodređenog integrala

Neka su funkcije f i F definisane na nekom intervalu (a,b). Ukoliko je funkcija F diferencijabilna na tom intervalu i ukoliko za sve $x\in(a,b)$ vrijedi $F'(x)=f(x)$ tada je za funkciju F kažemo da je **primitivna funkcija** funkcije f. Imajući u vidu da je, za neku konstantu C

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$$

vidimo da je i funkcija $F(x)+C$ također primitivna funkcija funkcije f.
Skup svih primitivnih funkcija funkcije f na intervalu (a,b) zovemo **neodređenim integralom** funkcije f i u ovom slučaju pišemo:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta iz skupa realnih brojeva.

Iz definicije neodređenog integrala vidimo da su operacije diferenciranja i integriranja jedna drugoj inverzne operacije: drugim riječima, izvod integrala jednak je podintegralnoj funkciji i obratno, integral izvoda funkcije jednak je toj funkciji (do na aditivnu konstantu C).
Neodređeni integral ima slijedeće osnovne osobine.

1. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$;
2. $\int d(f(x))=f(x)+C$;
3. $\int a\cdot f(x)dx=a\int f(x)dx$, gdje je a konstanta;
4. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

Na žalost, ne postoji način za izračunavanje integrala proizvoda ili integral količnika, kao što je to bio slučaj sa izvodima. Mi ćemo govoriti o nekim jednostavnijim metodama integracije. Napomenimo na početku da neke neodređene integrale nije moguće napisati pomoću elementarnih funkcija. Takav integral je, na primjer integral funkcije $f(x)=e^{-x^2}$.

Pri izračunavanju neodređenih integrala, koristićemo se slijedećom tablicom osnovnih integrala.

Tablica osnovnih integrala

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$;
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ a > 0$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$;
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

IX.1.2. Primjena neodređenog integrala u ekonomiji

Integrali imaju svoju primjenu u ekonomiji, o kojoj ćemo nešto više govoriti kada budemo govorili o određenom integralu. Napomenimo da integrale u ekonomiji možemo primijeniti za određivanje nepoznate ekonomske funkcije ukoliko je poznata marginalna funkcija te funkcije uz neki početni (ili neki drugi) uslov. Početni uslov nam je neophodan kako bismo na jedinstven način odredili nepoznatu ekonomsku funkciju, jer neodređeni integral nije jedinstvena funkcija, tako da moramo jednoznačno odrediti konstantu koja se u njemu javlja.

Primjer 1. Ukoliko je funkcija marginalnog troška $MC(Q) = Q^2 - Q$, odredi funkciju ukupnog troška, ako je poznato da fiksni troškovi proizvodnje iznose 15.

Rješenje. Kako je $MC(Q) = C'(Q)$, to je $C(Q) = \int MC(Q)dQ$, pa imamo

$C(Q) = \int (Q^2 - Q)dQ = \frac{1}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + C$, gdje je C neka konstanta koju ćemo odrediti iz početnog uslova. Naime, poznato nam je da fiksni troškovi proizvodnje iznose 15. Kako su fiksni troškovi proizvodnje troškovi koje imamo kad ne proizvodimo ništa, tj. kad proizvodimo $Q = 0$ jedinica proizvoda, to znači da je $C(0) = 15$. Kako je $C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + C$, to je $C(0) = C$, odakle imamo da je $C = 15$, pa je tražena funkcija ukupnihn troškova data sa $C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 + 15$.

IX.1.3. Rješavanje integrala neposredno koristeći tablice i osnovna svojstva neodređenog integrala (direktna integracija)

Korištenje tablice osnovnih integrala možemo ilustrirati slijedećim primjerima.

Primjer 1. Izračunati integral $\int \sqrt{x}dx$.

Rješenje. Podintegralnu funkciju $\sqrt{x}$ možemo napisati kao $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, pa primjenjujući tablicu integrala ($n=\frac{1}{2}$) imamo

$$\int \sqrt{x}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

Primjer 2. Izračunati integral $\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}}dx$.

Rješenje. U ovom slučaju podintegralna funkcija je oblika

$\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt[6]{x^3\cdot x}=x^{\frac{2}{3}}$, pa imamo $\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$.

Primjer 3. Izračunati integral $\int \frac{(x+1)^2}{x}dx$.

Rješenje. Nakon kvadriranja izraza u brojniku, integral možemo napisati u obliku sume tri tablična integrala. Imamo:

$$\int \frac{(x+1)^2}{x}dx=\int \frac{x^2+2x+1}{x}dx=\int xdx+\int 2dx+\int \frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+C.$$

Primjer 4. Izračunati integral $\int 2^x\cdot 3^{-x}dx$.

Rješenje. $$\int 2^x\cdot 3^{-x}dx=\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}+C=\frac{2^x}{3^x(\ln 2-\ln 3)}.$$

IX.2. Metoda smjene (supsitucije) za izračunavanje neodređenog integrala.

Ukoliko primitivnu funkciju funkcije f ne možemo naći direktnom integracijom možemo pokušati metodom smjene tj. uvođenjem nove promjenljive. Nakon uvođenja nove promjenljive moramo i diferencijal stare promjenjive izraziti preko diferencijala te nove promjenljive. Važno je zapamtiti da stara promjenljiva ne može ni u kom obliku biti pod integralom. Kada nađemo traženu primitivnu funkciju trebamo se vratiti na staru promjenljivu.

Uz pretpostavku diferencijabilnosti funkcije φ, općenito vrijedi :

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

U ovom slučaju kažemo da smo promjenljivu x zamijenili nekom funkcijom $\varphi(t)$ nove promjenljive t.

Primjer 1. Izračunati integral $\int (3-2x)^9 dx$.

Rješenje. U ovom integralu ćemo uvesti smjenu $t=3-2x$. Sada je potrebno da dx izrazimo preko dt. To ćemo učiniti tako što ćemo diferencirati jednakost $t=3-2x$, pa je $dt=-2dx$, odakle je $dx=-\frac{1}{2}dt$. Cio opisani postupak uvođenja smjene je urađen između dvije uspravne crte pored integrala. To ćemo činiti i u ostalim primjerima, zato posebno obratite pažnju na postupak unutar dvije uspravne crte.

$$\int (3-2x)^9 dx = \left| \begin{array}{l} 3-2x=t \\ -2dx=dt \\ dx=-\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int t^9 dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{10}}{10}+C = -\frac{1}{20}(3-2x)^{10}+C.$$

Primjer 2. Izračunati integral $\int x\sqrt{1-x^2}dx$.

Rješenje. U ovom integralu bi bilo zgodno uvesti smjenu $1-x^2=t$. Kako bi mogli uvesti tu smjenu, moramo biti u mogućnosti izraziti i ostatak podintegralne funkcije kao funkciju od nove promjenljive t i dt. To je moguće, jer je $dt=d\left(1-x^2\right)=-2xdx$, pa je $xdx=-\frac{1}{2}dt$.

Dakle, imamo

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} 1-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C.$$

Umjesto smjene $1-x^2=t$, međutim mogli smo uvesti i smjenu $1-x^2=t^2$ (pokušajte sami uraditi zadatak pomoću ove smjene).

Primjer 3. Izračunati integral $\int \frac{dx}{(2-5x)^{\frac{5}{2}}}$.

Rješenje. U ovom zadatku je najbolje uvesti smjenu $t=2-5x$, a zatim postupati analogno kao u prvom zadatku ovog paragrafa. Postupak smjene objašnjen je između dvije uspravne crte:

$$\int \frac{dx}{(2-5x)^{\frac{5}{2}}} = \left| \begin{array}{l} 2-5x=t \\ -5dx=dt \\ dx=-\frac{1}{5}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{5}\cdot \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}(2-5x)^{-\frac{3}{2}} + C \text{ ;}$$

Napomenimo da smo konstantu $-\frac{1}{5}$ izvukli pred integral, a zatim koristili činjenicu da je $\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}} = t^{-\frac{5}{2}}$.

Primjer 4. Izračunati integral $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

Rješenje. U ovom integralu ćemo uvesti smjenu $x=at$, jer je u tom slučaju $x^2+a^2=a^2\left(t^2+1\right)$, pa imamo

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \left| \begin{array}{c} x=at \\ dx=adt \\ t=\frac{x}{a} \end{array} \right| = \int \frac{adt}{a^2\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{a} arctgt + C = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Zapamtite kao tablični integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arcrg\frac{x}{a} + C .$$

Primjer 5. Izračunati integral $\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

Rješenje. Ovaj integral ima podintegralnu funkciju oblika $\frac{1}{ax^2+b}$, za $\frac{b}{a}>0$. Svodimo ga na tablični integral tako što prvo izvučemo koeficijent uz x^2, odnosno napišemo $ax^2+b=a\left(x^2+\frac{b}{a}\right)=a\left(x^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right)$, a potom primjenimo tablični integral koji smo izveli u prethodnom zadatku.

$$\int \frac{dx}{2x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} arctg\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\left(x\sqrt{2}\right) + C.$$

Primjer 6. Izračunati integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Rješenje. U ovom integralu je nazivnik podintegralne funkcije oblika $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $a > 0$. Kod integrala ovog tipa ćemo uvesti smjenu $x = at$, $dx = adt$. U ovom konkretnom slučaju je $a = 2$, pa smjenu uvodimo onako kako je naznačeno unutar dvije uspravne crte. Nakon izvlačenja konstante i skraćivanja dobijamo tablični integral. Imamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \left| \begin{array}{c} x = 2t \\ dx = 2dt \\ t = \frac{x}{2} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{\sqrt{4(t^2-1)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2-4}{4}}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)\right| + C.$$

Imajući u vidu da je $\ln\left|\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| - \ln 2 + C$, kao i činjenicu da je $C - \ln 2$ također realna konstanta, dobijamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + C.$$

Analogno bi postupali i u slučaju kada bi u nazivniku imali sabiranje pod korijenom.

Zapamtite kao tablični integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Primjer 7. Izračunati integral $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Rješenje. U ovom slučaju nazivnik podintegralne funkcije je oblika $\sqrt{a^2 - x^2}$, pa ćemo uvesti smjenu $x = at$, analogno kao u prethodnom zadatku. U našem konkretnom slučaju je $a^2 = 5$, pa je $a = \sqrt{5}$. Imamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{5}t \\ dx = \sqrt{5}dt \\ t = \frac{x}{\sqrt{5}} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{5}dt}{\sqrt{5-5t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Zapamtite kao tablični integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Primjer 8. Izračunati integral $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

Rješenje. Nazivnik podintegralne funkcije u datom integralu je oblika $\sqrt{b-ax^2}$, pri čemu su brojevi a i b pozitivni. Zbog toga ćemo, analogno kao u primjeru 9. prvo izlučiti koeficijent uz x^2 da dobijemo $\sqrt{b-ax^2} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}-x^2} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - x^2}$, a potom primjenimo tablični integral koji smo izveli u prethodnom zadatku. Dakle,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-x^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}} + C.$$

Primjer 9. Izračunati integral $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$.

Rješenje. U datom integralu u nazivniku je funkcija $1+x^4$, pa je prirodno prvo pokušati uvesti smjenu $1+x^4=t$. Ovu smjenu je moguće uvesti samo ukoliko smo u mogućnosti ostatak podintegralne funkcije izraziti preko t i dt. Kako je $dt = 4x^3dx$, to je $x^3dx = \frac{1}{4}dt$, pa je moguće uvesti ovu smjenu. Imamo:

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^4 = t \\ 4x^3dx = dt \\ x^3dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln t + C = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.$$

Napomenimo, na kraju da ukoliko bismo u brojniku razlomka pod integralom imali funkciju x^2 ili naprimjer x, ovakva smjena ne bi imala smisla, jer ne bismo mogli naći načina da ostatak podintegralne funkcije izrazimo kao funkciju od t i dt i da pri takvoj smjeni dobijemo integral čije rješavanje je jednostavnije od rješavanja polaznog integrala.

Primjer 10. Izračunati integral $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+29}dx$.

Rješenje. U ovom integralu je brojnik podintegralne funkcije diferencijal od nazivnika, pa je smjena $t = x^2+5x+29$ očigledna. Imamo:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+29}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+5x+29 \\ dt = (2x+5)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+5x+29) + C.$$

Ukoliko nam je dat integral kod kojeg je brojnik podintegralne funkcije diferencijal nazivnika, taj integral uvijek rješavamo tako što uvedemo smjenu $t = f(x)$, gdje je $f(x)$ nazivnik podintegralne funkcije.

Općenito vrijedi:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

(2)

IX.3. Metoda parcijalne integracije

Neka su nam date dvije funnkcije u i v, koje su diferencijabilne i čiji izvodi su integrabilne funkcije.

Diferencijal proizvoda funkcija *u=u(x)* i *v=v(x)* je:

$$d(u \cdot v) = vdu + udv,$$

a integral diferencijala ovog proizvoda je:

$$\int d(u \cdot v) = \int vdu + \int udv.$$

Iz ove jednakosti dobijemo formulu koja glasi:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Na ovoj formuli se zasniva metod parcijalne integracije, koji ima dva koraka. Prvi korak se sastoji u tome da funkciju $f(x)dx$ u integralu $\int f(x)dx$ napišemo u obliku $u(x)dv(x)$, pri čemu smo funkcije u i v pogodno odabrali. Tada se izračunavanje integrala $\int f(x)dx$ svodi na izračunavanje integrala $\int v(x)du(x)$. Izraz pogodno odabrane funkcije u i v znači da je integral $\int v(x)du(x)$ jednostavniji za izračunavanje od polaznog integrala, kao i to da iz datih uslova možemo egzaktno odrediti funkciju v, jer u suprotnom metoda parcijalne integracije nema smisla.

Postoje neka okvirna pravila šta odabrati za funkciju u a šta za funkciju v, pri čemu ta pravila nisu strogo matematička jer imaju i svoje izuzetke. Mi ćemo ih, ipak navesti.

Ukoliko je funkcija f proizvod logaritamske funkcije, ili inverzne trigonometrijske funkcije i neke druge funkcije, treba pokušati riješiti taj integral uzimajući da je u jednako toj logaritamskoj funkciji ili toj inverznoj trigonometrijskoj funkciji, a za dv uzimajući ostatak.

Ukoliko je funkcija f proizvod neke eksponencijalne funkcije i neke druge funkcije, treba pokušati riješiti integral uzimajući za dv da je jednako proizvodu te eksponencijalne funkcije sa dx, a za u uzimajući ostatak.

Ukoliko je funkcija f proizvod funkcije sin ili cos i neke druge funkcije, tada uzimamo da je $dv = \sin x dx$ ili $dv = \cos x dx$, a ostatak uzimamo za u.

Još jednom napominjemo da ova pravila imaju i svoje izuzetke, te da ih treba uzimati samo kao putokaz pri rješavanju datog problema.

Primjer 1. Izračunati integral $\int x \ln x dx$.

Rješenje. Stavljamo $u = \ln x$. Ostatak je xdx, pa uzimamo da je $dv = xdx$. Iz ove jednakosti trebamo izračunati funkciju v koja zadovoljava jednakost. To ćemo učiniti integraljenjem: $v = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$ (ovdje ne dodajemo konstantu). Skraćeni postupak parcijalne integracije dat je između dvije uspravne crte. Dakle,

$$\int x \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = u \cdot v - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Primjer 2. Izračunati integral $\int x \ln(x^2 - 1) dx$.

Rješenje. U ovom integralu ćemo, kao i u prethodnom primjeru staviti $u = \ln(x^2 - 1)$, $xdx = dv$, odakle je $v = \frac{1}{2}x^2$. Imamo:

$$\int x \ln(x^2 - 1) dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x^2 - 1) \\ du = \frac{2x}{x^2 - 1} dx \\ dv = xdx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln(x^2 - 1) - \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx.$$

Kako bi izračunali posljednji integral, podijelit ćemo (sa ostatkom) x^3 sa $x^2 - 1$. Dobijamo:

$$\begin{array}{l} x^3 : (x^2 - 1) = x \\ \underline{-\left(x^3 - x\right)} \\ \qquad x \end{array}$$

To znači da je količnik pri dijeljenju jednak x, kao i da je ostatak upravo x. Sada podintegralnu funkciju možemo napisati u obliku:

$\frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1}$, odakle je

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx = \int x dx + \int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{x}{x^2 - 1} dx.$$

Posljednji integral ćemo izračunati uvođenjem smjene $t = x^2 - 1$, jer je tad $xdx = \frac{1}{2}dt$, pa je

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + C.$$

Sada smo izračunali sve integrale, pa se možemo vratiti unazad. Imamo:

$$\int x \ln(x^2 - 1) dx = \frac{x^2}{2}\ln(x^2 - 1) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1) + C = \frac{x^2 - 1}{2}\ln(x^2 - 1) - \frac{x^2}{2} + C.$$

Primjer 3. Izračunati integral $\int x^2 e^{-x} dx$.

Rješenje. U datom integralu imamo eksponencijalnu funkciju, pa ćemo uzeti $dv = e^{-x}dx$, $u = x^2$. Odavde je $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$, pa imamo:

$$\int x^2 e^{-x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx.$$

U integralu na desnoj strani ćemo ponovo primijeniti parcijalnu integraciju, stavljajući $dv = e^{-x}dx$ i $u = x$. Imamo:

$$\int xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Uvrštavajući ovo u polazni integral dobijamo

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x} + C) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.$$

IX.4. Integracija racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je funkija oblika $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ neki polinomi stepena n i m respektivno. Ukoliko je $n \geq m$, tada polinom $P_n(x)$ možemo podijeliti polinomom $Q_m(x)$ i dobiti neki količnik i ostatak čiji stepen je manji od n. Zbog toga možemo smatrati da kada govorimo o racionalnoj funkciji govorimo o funkciji koja je količnik dva polinoma pri čemu je stepen polinoma u brojniku manji od stepena polinoma u nazivniku ($n < m$). Poznato je da svaku takvu racionalnu funkciju možemo napisati u obliku zbira prostih (parcijalnih) razlomaka, odnosno racionalnih funkcija koje imaju sljedeća dva oblika:

a) $\frac{A}{(x-a)^k}$, gdje je k neki prirodan broj, a A i a su neke realne konstante i

b) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$, gdje je m neki prirodan broj, gdje su A, B, p i q neke realne konstante,

pri čemu pretpostavljamo da trinom x^2+px+q nema realnih nula (jer u suprotnom bismo racionalnu funkciju ovog oblika mogli napisati kao sumu funkcija oblika a)).
Ranije smo vidjeli kako metodom smjene ($t = x - a$) izračunati integrale oblika a). Podsjetimo se,

za $k = 1$ je $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$,

za $k \geq 2$ je $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \frac{A}{1-m}(x-a)^{1-m} + C$.

Pogledajmo sada kako se izračunavaju integrali oblika $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m}$. Integral ovog oblika se rješava u sljedećih nekoliko koraka:

1. Izračunamo izvod nazivnika podintegralne funkcije, tj.
$\left(x^2+px+q\right)'=2x+p$

2. Odredimo konstante M i N takve da vrijedi
$Ax+B=M\left(2x+p\right)+N$.

3. Integral rastavimo na sumu dva integrala:
$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=M\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+N\int\frac{dx}{x^2+px+q}=MI_1+NI_2.$$
U integralu I_1 funkcija u brojniku je izvod od nazivnika i njega izračunavamo metodom smjene.
Objasnimo kako izračunati integral I_2.
Kao prvo, nazivnik podintegralne funkcija ćemo svesti na kanonski oblik:
$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$
a potom uvesti smjenu $x+\frac{p}{2}=t,\ \ x=t-\frac{p}{2},\ \ dx=dt$ i dobiti
$$I_2=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$
Integral na desnoj strani je tablični integral, u kojem je izraz $q-\frac{p^2}{4}$ pozitivan ili negativan.
Dakle, polazni integral se svodi na integrale koji su tablični ili ih rješavamo metodom smjene.
Ukoliko trinom x^2+px+q ima realne nule, odnosno vrijedi: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{Ax+B}{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$,
ovaj razlomak možemo rastaviti na zbir prostih razlomaka oblika,
$$\frac{Ax+B}{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{B_1}{x-x_2}.$$
U prva dva primjera ćemo pokazati kako se izračunavaju integrali kod kojih je A=0, iako ćemo se s takvim integralima sretati i kasnije.

Primjer 1. Izračunati integral $\int\frac{dx}{x^2-x+2}$.

Rješenje. Jedini problem sa kojim se susrećemo pri rješavanju ovog integrala jeste kako napisati trinom x^2-x+2 u kanonskom obliku. Posmatramo koeficijent uz x, koji je jednak

-1, pa će puni kvadrat koji se javlja u kanonskom prikazui biti jednak $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Da bi dobili jednakost sa polaznim izrazom potrebno je još oduzeti drugi član na kvadrat, tj. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Dakle, $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$. Sada uvodimo smjenu na način kako smo objasnili gore.

Imamo:

$$\int\frac{dx}{x^2-x+2}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$$

Primijetimo da je integral $\int\frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}$ koji je preostao za izračunavanje zapravo integral tipa $\int\frac{dt}{t^2+a^2}$, gdje je $a=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$, kojeg smo izračunali u 1.3.

Primjer 2. Izračunati integral $\int\frac{dx}{3x^2-x+1}$.

Rješenje. S obzirom da je nazivnik podintegralne funkcije oblika $3x^2-x+1$, trebamo prvo izlučiti faktor uz x^2, tj. broj 3. Nakon izlučivanja dobijemo $3x^2-x+1=3\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$. Sada je potrebno trinom $\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$ svesti na kanonski oblik. Koeficijent uz x je $-\frac{1}{3}$, pa je $\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}=\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}$.

Sada imamo:

$$\int\frac{dx}{3x^2-x+1}=\int\frac{dx}{3\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}}=\left|\begin{matrix}t=x-\frac{1}{6}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{11}{36}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{6}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{11}}{6}}+C=\frac{2}{\sqrt{11}}arctg\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+C.$$

Pogledajmo sada kako rješavati integral oblika $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ u slučaju kada je A $\neq$ 0.

Primjer 3. Izračunati integral $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$.

Rješenje. U ovom integralu ćemo prvo izraz u brojniku napisati kao sumu dva izraza kao što je navedeno u prva dva koraka.
Imamo:

1. $\left(x^2+2x+10\right)'=2x+2$.

2. Trebamo odrediti brojeve M i N tako da vrijedi
$5x+2=A(2x+2)+B;$ odnosno $5x+2=2Ax+(2A+B)$.

Izjednačavanjem koeficijenata uz x i slobodan član u posljednjoj jednakosti dobijamo sistem $2A=5;\ \ 2A+B=2$, odakle se $A=\frac{5}{2}$ i $B=-3$. Dakle, dobili smo da je

$5x+2=\frac{5}{2}(2x+2)-3$, pa integral možemo napisati kao sumu dva integrala kao što je objašnjeno u koraku 3. Imamo:

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx=\frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx-3\int \frac{dx}{x^2+2x+10}=\frac{5}{2}I_1-3I_2.$$

Integral I_1 se rješava kao u paragrafu 1.3. smjenom $t=x^2+2x+10$ pomoću koje se dobije $I_1=\ln(x^2+2x+10)$.

Ostaje da se riješi integral I_2. Integrale ovakvog oblika smo rješavali u prva dva primjera. Nakon svođenja nazivnika na kanonski oblik i uvođenja smjene imamo:

$$I_2=\int \frac{dx}{x^2+2x+10}=\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2+9}=\begin{vmatrix} t=x+1 \\ dx=dt \end{vmatrix}=\int \frac{dt}{t^2+9}=\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

Konačno dobijemo:

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx=\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

Primjer 4. Izračunati integral $\int \frac{xdx}{x^2-2x-3}$.

Rješenje. Pri rješavanju ovog integrala postupamo kao u prethodnom zadatku. Imamo:

$\left(x^2-2x-3\right)'=2x-2$.

Sada određujemo M i N iz uslova
$x=M\left(2x-2\right)+N=2Mx+\left(N-2M\right)$.

Izjednačavanjem koeficijenata dobijamo $1=2M$ i $0=N-2M$, odakle je $M=\frac{1}{2}$ i $N=1$.

Dakle, $x=\frac{1}{2}\left(2x-2\right)+1$, pa imamo:

$$\int \frac{xdx}{x^2-2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-3} + \int \frac{dx}{x^2-2x-3} = \frac{1}{2}I_1 + I_2 .$$

Lako se uvjeravamo da je $I_1 = \ln\left|x^2-2x-3\right|$.

Integral I_2 ćemo izračunati na uobičajeni način. Kao prvo, pokažimo kako se izračunavaju integrali oblika $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$. Očigledno je da se funkcija u nazivniku može rastaviti na faktore, pa imamo

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x+a} .$$

Množenjem sa $(x-a)(x+a)$ i izjednačavanjem koeficijenata dobijamo da je $A_1 = \frac{1}{2a}$, $A_2 = -\frac{1}{2a}$. Sada je

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Ovaj integral možemo zapamtiti kao tablični. Dakle:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Sada možemo nastaviti sa rješavanjem polaznog integrala. Nakon svođenja na kanonski oblik dobijamo $x^2-2x-3 = (x-1)^2 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$, pa je:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2-2x-3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-4} = \left|\begin{matrix} t = x-1 \\ dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C.$$

Na kraju ovog paragrafa uradimo nekoliko primjera u kojima ćemo pokazati kako rastavljati racionalnu funkciju na parcijalne razlomke i primijenjivati metode integracije objašnjene u specijalnim slučajevima.
To ćemo uraditi na slijedećim primjerima:

Primjer 5. Izračunati integral $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$.

Rješenje. U podintegralnoj funkciji stepen polinoma u brojniku je veći od stepena polinoma u nazivniku, pa ćemo prvo podijeliti (sa ostatkom) brojnik i nazivnik. Imamo

$(x^3+1):(x^2-3x+2) = x+3$
x^3-3x^2+2x (oduzmemo)

$3x^2-2x+1$
$3x^2-9x+6$ (oduzmemo)

$7x-5$ (ostatak)

Dakle, količnik pri dijeljenju je $x+3$, dok je ostatak $7x-5$, pa imamo

$\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}=x+3+\dfrac{7x-5}{x^2-3x+2}$. Sada integral možemo pisati u obliku:

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\int\left(x+3\right)dx+\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}=\frac{x^2}{2}+3x+I_1.$$

Diskriminanta kvadratnog trinoma u nazivniku je pozitivna, a njegove nule su $x_1=1$ i $x_2=3$, pa je $x^2-3x+2=(x-1)(x-3)$. Sada možemo podintegralnu funkciju u integralu I_1 rastaviti na parcijalne razlomke. Imat ćemo dva parcijalna razlomka čiji nazivnici su $(x-1)$ i $(x-3)$:

$$\frac{7x-5}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Nakon množenja sa $(x-1)(x-2)$ i grupisanja konstanti dobijamo

$$7x-5=A(x-2)+B(x-1)=(A+B)x-(2A+B).$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene dobijamo sistem jednačina

$\begin{array}{l} A+B=7 \\ 2A+B=5 \end{array}$, čije rješenje je $A=-2$ i $B=9$.

Sada imamo

$\dfrac{7x-5}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{9}{x-2}$, pa je

$$I_1=\int\frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{7x-5}{(x-1)(x-2)}dx=-2\int\frac{dx}{x-1}+9\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-2\ln\left|x-1\right|+9\ln\left|x-2\right|+C=\ln\left|\frac{\left(x-2\right)^9}{\left(x-1\right)^2}\right|+C.$$

Sada konačno rješenje možemo izraziti u obliku

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\ln\left|\frac{\left(x-2\right)^9}{\left(x-1\right)^2}\right|+C.$$

Primjer 6. Riješiti integral $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^4-8x}dx$.

Rješenje. Stepen polinoma u brojniku ovog integrala je manji od stepena polinoma u nazivniku, tako da nije potrebno dijeliti. Kako bi odredili na koje parcijalne razlomke ćemo rastaviti podintegralnu funkciju, potrebno je polinom u nazivniku rastaviti na faktore. Imamo $x^4-8x=x(x^3-2^3)=x(x-2)(x^2+2x+4)$. Dakle,

$$\int\frac{x^3+1}{x^4-8}dx=\int\frac{x^3+1}{x(x-2)(x^2+2x+4)}dx.$$

Sada vidimo da će nazivnici parcijalnih razlomaka biti redom x, $x-2$ i x^2+2x+4 (ovaj trinom ima negativnu diskriminantu, pa ga ne možemo dalje rastavljati), pa imamo

$$\frac{x^3+1}{x(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+4}.$$

Sada trebamo odrediti nepoznate konstante. Kao prvo, pomnožit ćemo jednakost sa $x(x^3-8)$, pa nakon toga izmnožiti izraze na desnoj strani. Dobijamo

$x^3+1=A(x^3-8)+B(x^3+2x^2+4x)+C(x^3-2x^2)+D(x^2-2x)$.

Sada je potrebno grupisati koeficijente uz iste stepene promjenljive x:

$x^3+1=x^3(A+B+C)+x^2(2B-2C+D)+x(4B-2D)-8A$.

Nakon izjednačavanja koeficijenata uz iste stepene u polinomima na lijevoj i desnoj strani imamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad A+B+C=1 \\ x^2 &: \quad 2B-2C+D=0 \\ x &: \quad 4B-2D=0 \\ x^0 &: \quad -8A=1 \end{aligned}$$

čije rješenje je: $A=-\dfrac{1}{8}$; $B=\dfrac{3}{8}$; $C=D=\dfrac{3}{4}$.

Dakle,

$$\frac{x^3+1}{x(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{-\frac{1}{8}}{x}+\frac{\frac{3}{8}}{x-2}+\frac{\frac{3}{4}\left(x+1\right)}{x^2+2x+4},\text{ pa imamo}$$

$$\int\frac{x^3+1}{x^4-8x}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{3}{4}\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}dx=-\frac{1}{8}\ln x+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{4}I_1.$$

Integral I_1 rješavamo smjenom $t=x^2+2x+4$, jer je $dt=2(x+1)dx$, pa je $I_1=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)$. Sada je

$$\int\frac{x^3+1}{x^4-8x}dx=-\frac{1}{8}\ln x+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{8}\ln(x^2+2x+4)+C=\frac{3}{8}\ln(x^3-8)-\frac{1}{8}\ln x+C.$$

Primjer 7. Izračunati integral $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+3x^2}$.

Rješenje. U ovom integralu ćemo nazivnik podintegralne funkcije rastaviti na faktore i dobiti $x^4+3x^2=x^2(x^2+3)=x\cdot x\cdot(x^2+3)$, pa ćemo podintegralnu funkciju rastaviti na tri parcijalna razlomka čiji nazivnici su x, x^2 i (x^2+3). Imamo

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Nakon množenja sa $x^2(x^2+3)$ dobijamo

$1=A(x^3+3x)+B(x^2+3)+Cx^3+Dx^2$.

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobijemo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x^3 &: A+C=0 \\ x^2 &: B+D=0 \\ x^1 &: 3A=0 \\ x^0 &: 3B=1 \end{aligned}$$

čije je rješenje: $A=0,\ B=\dfrac{1}{3},\ C=0,\ D=-\dfrac{1}{3}$, pa je

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+3}$$, odakle imamo

$$\int \frac{dx}{x^4+3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+3} = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C .$$