AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek za medicinske i poslovno-tehnološke studija

POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

10 Ekonomske funkcije

10.1 Funkcija tražnje u užem smislu

10.2 Funkcija ponude

10.3 Uslovi ravnoteže na tržištu

10.4 Funkcija ukupnog prihoda

10.5 Funkcija ukupnih troškova

10.6 Funkcija profita

Literatura

1. Marko Backović, Jovo Vuleta (2000): *Ekonomsko matematički metodi i modeli*, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
2. Ivana Kovačević, Ana Savić (2006): *Poslovna matematika*, Viša elektrotehnička škola, Beograd.
3. N. Gregory Mankiw (2011): *Principles of Economics*, Sixth Edition, HARVARD UNIVERSITY Copyright Cengage Learning.

Poslovna matematika

10 Ekonomske funkcije

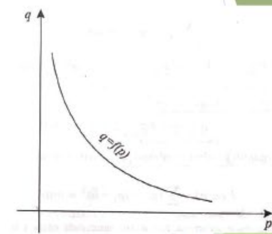
- 10.1 Funkcija tražnje u užem smislu
- 10.2 Funkcija ponude
- 10.3 Uslovi ravnoteže na tržištu
- 10.4 Funkcija ukupnog prihoda
- 10.5 Funkcija ukupnih troškova
- 10.6 Funkcija profita

Predavač: mr Tatjana Bajić

1

1. Funkcija tražnje u užem smislu (Maršalova funkcija tražnje)

- Funkciju tražnje u užem smislu izražavamo u obliku
$$q = f(p)$$
gde q predstavlja tražnju (količinu tražene robe, obim tražnje), a p cenu te robe.
- Funkcije tražnje mora da zadovoljava:
$p \geq 0,\ q \geq 0$ i
uslov normalnosti tražnje:
$$\frac{dq}{dp} = \frac{df(p)}{dp} = f'(p) < 0$$



2

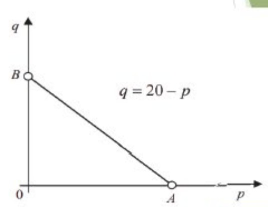
Primeri funkcija tražnje

$q = -p + 20,\ p \in (0, 20)$

$q = -3p + 48,\ p \in (0, 12)$

$q = 8e^{-\frac{p}{8}+2},\ p \in (0, +\infty)$

$q = (p-2)^2,\ p \in (0, 2)$



3

2. Funkcija ponude

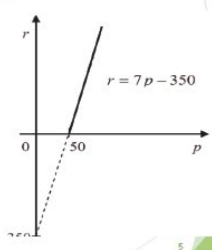
- Funkcija ponude se može predstaviti u obliku
$$r = g(p)$$
gde r predstavlja **količinu ponude**, a **p cenu posmatranog proizvoda.**
- Ponuda nekog proizvoda po pravilu raste, kada raste njegova cena.
- Odatle, funkcija ponude treba da zadovoljava
$p \geq 0,\ r > 0$ i
$$\frac{dr}{dp} = \frac{dg(p)}{dp} = g'(p) > 0$$

4

Primer funkcije ponude

$r = 7p - 350,\ p \in (50, +\infty)$

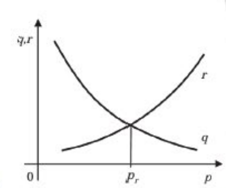
$r = \sqrt{2p + 8},\ p \in (0, +\infty)$



5

3. Uslovi ravnoteže na tržištu

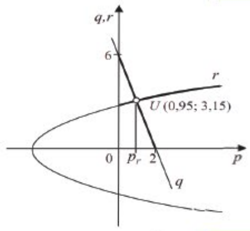
- Cena p_r za koju se ostvaruje jednakost tražnje i ponude, odnosno za koju važi
$$q = f(p_r) = g(p_r) = r$$
predstavlja **ravnotežnu cenu** posmatranog proizvoda.
- Ravnotežna cena p_r je tzv. **stabilna cena** za koju se ostvaruje **stabilnost tržišta.**
- Ravnotežna cena p_r se dobija u preseku grafika funkcija tražnje $q = f(p)$ i ponude $r = g(p)$.



6

Primer: Uslov ravnoteže na tržištu

- Funkcija tražnje
  $q = -3p + 6,\ p \in (0, 2)$
- Funkcija ponude
  $r = \sqrt{2p + 8},\ p \in (0, +\infty)$
- Ravnotežna cena $p_r = 0.95$ se dobija iz jednakosti
  $-3p + 6 = \sqrt{2p + 8}$
  i uslova da $p \in (0, 2)$. Tada
  $q = r = 3.15$

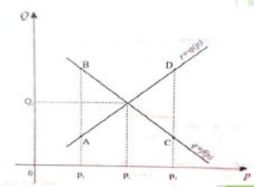


7

Uslovi ravnoteže kada su funkcija ponude i funkcija tražnje linearne funkcije

- Ukoliko su
  - funkcija tražnje $q = f(p)$ i
  - funkcija ponude $r = f(p)$

linearne funkcije po $\mathbf{p}$, $p \geq 0$, tada
  - njihovi grafici su prave u ravni i
  - ravnotežna cena p_r se dobija u preseku ovih pravih.



8

4. Funkcija ukupnog prihoda

- Ukupan prihod koji neko preduzeće ostvaruje po osnovu proizvodnje i/ili prodaje nekog proizvoda utvrđuje se iz proizvoda
  - prodate količine i
  - cene p tog proizvoda.

  odnosno Ukupan prihod = Prodata količina x Cena proizvoda.
- Ako pretpostavimo postojanje jednakosti između
  - prodate (proizvedene) količine nekog proizvoda i
  - tražnje $q = f(p)$ za tim proizvodom,

  tada ukupan prihod R možemo iskazati u obliku
  $$R = p \cdot q = p \cdot f(p)$$
- Kako za svaku funkciju tražnje $q = f(p)$ možemo odrediti inverznu funkciju oblika $p = \varphi(q)$, ukupan prihod možemo izraziti u obliku funkcije obima tražnje:
  $$R = q \cdot \varphi(q)$$

9

Funkcija prosečnog prihoda

- Iz funkcije ukupnog prihoda
  $$R = R(p) = p \cdot f(p)$$
  odnosno
  $$R = R(q) = q \cdot \varphi(q)$$
  možemo dobiti **funkciju prosečnog prihoda**
  $$\overline{R} = \overline{R}(p) = \frac{R(p)}{p}$$

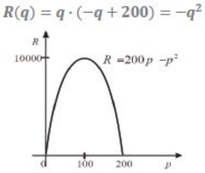
odnosno **prihod po jedinici proizvoda**
$$\overline{R} = \overline{R}(q) = \frac{R(q)}{q}$$

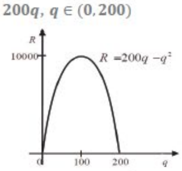
10

Primer funkcije prihoda

- Neka je data funkcija tražnje
  $$q = -p + 200,\ p \in (0, 200)$$
- Tada, **funkcija prihoda** je

$R(p) = p \cdot (-p + 200) = -p^2 + 200p,\ p \in (0, 200)$
odnosno iz $p = -q + 200$
$R(q) = q \cdot (-q + 200) = -q^2 + 200q,\ q \in (0, 200)$



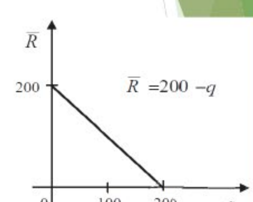


11

Primer prosečne funkcije prihoda

- Za funkciju prihoda iz prethodnog primera,
  $R(q) = q \cdot (-q + 200) = -q^2 + 200q$

  prosečan prihod je
  $$\overline{R}(q) = \frac{R(q)}{q} = \frac{-q^2 + 200q}{q} = -q + 200$$



12

Granični (marginalni) prihodi

- Ukoliko je poznata funkcija tražnje $q = f(p)$, **ispitivanje kretanja ukupnog prihoda R** može se vršiti u odnosu na:
  - cenu p posmatranog proizvoda iz $R = p \cdot f(p)$, kao i u odnosu na
  - kretanje iznosa tražnje q iz $R = q \cdot \varphi(q)$.
- U uslovima u kojima je poznata funkcija tražnje $q = f(p)$, za potrebe ispitivanja kretanja ukupnog prihoda R značajno mesto ima utvrđivanje i ispitivanje **graničnog prihoda.**
- **Granični (marginalni) prihodi,**
  - koji pokazuju iznos priraštaja ukupnog prihoda do koga dolazi pri povećanju cene p (tražnje q) posmatranog proizvoda sa datog nivoa za jednu jedinicu,
  - ispituju se i iskazuju preko odgovarajaćuje funkcije graničnih prihoda.

13

Funkcija graničnog prihoda

- Pretpostavimo da je funkcija ukupnih prihoda $R = p \cdot f(p)$ $(R = q \cdot \varphi(q))$ neprekidna funkcija cene p (tražnje q) u intervalu (a, b).
- Ukoliko se **ukupan prihod R** predstavlja u vidu:
  - funkcije cene p, $R = p \cdot f(p)$, tada je funkcija graničnog prihoda
  $$\frac{dR}{dp} = R'_p = f(p) + pf'(p)$$
  - funkcije tražnje q, $R = q \cdot \varphi(q)$, tada je funkcija graničnog prihoda
  $$\frac{dR}{dq} = R'_q = \varphi(q) + q\varphi'(q)$$
- Ako je
  - $\frac{dR}{dp} > 0$ $(\frac{dR}{dq} > 0)$, tada ukupan prihod R raste sa porastom cene p (tražnje q);
  - $\frac{dR}{dp} = 0$ $(\frac{dR}{dq} = 0)$, tada se ispituje ekstremna vrednost ukupnog prihoda R;
  - $\frac{dR}{dp} < 0$ $(\frac{dR}{dq} < 0)$, tada ukupan prihod R opada sa porastom cene p (tražnje q).

Primer određivanje količine i cene proizvoda za postizanje maksimalnog ukupnog prihoda

- Neka je data funkcija tražnje $q = -3p + 30$, $p \in (0, 10)$. Odrediti količinu **q** i cenu **p** proizvoda pri kojima se postiže maksimalan ukupan prihod R.
- Rešenje: $R = p \cdot q$
  - Iz $q = -3p + 30$ sledi $p = -\frac{q}{3} + 10$, $q \in (0, 30)$.
  - Odatle, $R = -\frac{q^2}{3} + 10q$ i $\frac{dR}{dq} = -\frac{2}{3}q + 10$, pri čemu je $\frac{dR}{dq} = 0$ za $q = 15$.
  - Kako je $\frac{d^2R}{(dq)^2} = -\frac{2}{3} < 0$, nesredno sledi da za količinu $q = 15$ tražene robe ukupan prihod R dostiže svoju maksimalnu vrednost:
  $$R(15) = \left(-\frac{15}{3} + 10\right) \cdot 15 = 75$$

pri čemu je cena posmatranog proizvoda $p = -\frac{15}{3} + 10 = 5$ jedinica.

15

5. Funkcija ukupnih troškova

- Ukupni troškovi, koji se ostvaruju u procesu proizvodnje nekog proizvoda, zavise prvenstveno od obima proizvodnje.
- Ako sa C označimo ukupne troškove, a sa q obim proizvodnje (za koji pretpostavljamo da je jednak obimu tražnje za posmatranim proizvodom), tada se **funkcija ukupnih troškova** definiše sa
$$C = F(q),\ q > 0,$$
koja je u okviru intervala definisanosti
  - $C > 0$,
  - neprekidna, diferencijabilna i
  - monotono rastuća ($C' = F'(q) > 0$ za $q > 0$).
- Promena bilo kog od uslova proizvodnje zahteva određivanje nove funkcije ukupnih troškova.

16

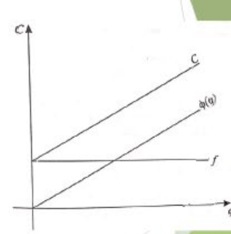
Varijabilni i fiksni troškovi

- Ukupni troškovi proizvodnje nekog proizvoda dele se na:
  - varijabilne i
  - fiksne.
- **Varijabilni troškovi** predstavljaju funkciju obima proizvodnje, a **fiksni troškovi** predstavljaju konstantnu veličinu čiji iznos ne zavisi od obima proizvodnje proizvoda.
- Odatle, funkcija ukupnih troškova može se predstaviti u obliku
$$C = \varphi(q) + f,\ q > 0,$$
gde su $\varphi(q)$ varijabilni, a f fiksni troškovi.

17

Primeri funkcija ukupnih troškova

- **Varijabilni troškovi:**
$$\varphi(q) = aq,\ q > 0,\ a > 0.$$
- **Fiksni troškovi:** $f > 0$.
- Tada je grafik funkcije ukupnih troškova
$$C = aq + f.$$
- Najčešće korišćeni oblici funkcija kojim se izražava kretanje ukupnih troškova u zavisnosti od obima proizvodnje:
$$C = aq + b$$
$$C = aq^2 + bq + c$$
$$C = ae^{bq}$$
$$C = a(1+q)^2$$



18

Formulisanje funkcije ukupnih troškova

- U cilju eksplicitnog formulisanja funkcije ukupnih troškova

$$C = F(q),\ q > 0$$

neophodno je na osnovu empirijskih podataka o kretanju obima proizvodnje i troškova

$$C_i, q_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

odrediti vrednosti nepoznatih parametara funkcije ukupnih troškova.

- Metod koji se najčešće primenjuje za određivanje nepoznatih parametara funkcije ukupnih troškova je **metod najmanjih kvadrata** (MNK).
- MNK polazi od zahteva za minimizacijom sume kvadrata odstupanja vrednosti ukupnih troškova od ogovarajućih vrednosti na datoj krivoj

$$min \sum_{i=1}^{n} (C_i - F(q_i))^2$$

19

Primer: Formulisanje funkcije ukupnih troškova metodom najmanjih kvadrata

- Na osnovu dobijenih podataka o
  - vrednosti ukupnih troškova, C, i o
  - vrednostima odgovarajućih obima proizvodnje q

q	10	20	30	40	50
C	280	950	2000	3460	5320

treba odrediti funkciju ukupnih troškova oblika

$$C = aq^2 + bq + c$$

odnosno nepoznate parametre a, b, c.

- Definišemo $G(a,b,c) = \sum_{i=1}^{5} (C_i - aq_i^2 - bq_i - c)^2$
- Nepoznate parametre a,b,c treba odrediti tako da $\min_{a,b,c} G(a,b,c) = \min_{a,b,c} \sum_{i=1}^{n} (C_i - aq_i^2 - bq_i - c)^2$

20

Primer: Određivanje nepoznatih parametara funkcije ukupnih troškova pomoću MNK

- Odatle nepoznate parametre a,b,c dobijamo iz tzv. normalnih jednačina:

$$\frac{\partial G(a,b,c)}{\partial a} = 0, \frac{\partial G(a,b,c)}{\partial b} = 0, \frac{\partial G(a,b,c)}{\partial c} = 0$$

- Odnosno iz

$\sum_{i=1}^{5} C_i q_i^2 = a \sum_{i=1}^{5} q_i^4 + b \sum_{i=1}^{5} q_i^3 + c \sum_{i=1}^{5} q_i^2$

$\sum_{i=1}^{5} C_i q_i = a \sum_{i=1}^{5} q_i^3 + b \sum_{i=1}^{5} q_i^2 + c \sum_{i=1}^{5} q_i$

$\sum_{i=1}^{5} C_i = a \sum_{i=1}^{5} q_i^2 + b \sum_{i=1}^{5} q_i + 5c$

dobijamo

5 500a+150b+5c=12 000

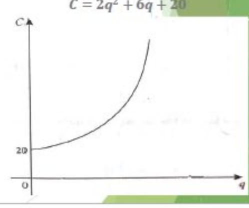
225 000a+5 500b+150c=486 000

9 790 000a+225 000b+5 500c=21 040 000

i odatle: a=2, b=6 i c=20,

što znači da je za dobijene podatke, funkcija ukupnih troškova oblika

$$C = 2q^2 + 6q + 20$$



Funkcija prosečnih troškova

- Deljenjem ukupnih troškova $C = F(q),\ q > 0$, sa obimom proizvodnje q, dobijamo troškove **po jedinici proizvoda** koje nazivamo **prosečnim troškovima.**
- Odatle, **funkcija prosečnih troškova** se definiše sa

$$\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{F(q)}{q},\ q > 0$$

- Kako se ukupni troškovi dele na varijabilne i fiksne, prosečni troškovi do određenog nivoa padaju, a zatim rastu:
- Iz $0 = \frac{d\overline{C}}{dq} = \frac{F'(q)q - F(q)}{q}$ dobijamo $F'(q)q - F(q) = 0$, odnosno u tački

$$q = \frac{F(q)}{F'(q)}$$

funkcija prosečnih troškova dostiže minimum jer $\frac{d^2\overline{C}}{dq^2} = \frac{(F''(q) - 2F'(q))q + 2F(q)}{q^3} > 0$.

Primer funkcije prosečnih troškova

- Neka je data funkcija ukupnih troškova $C = 620(1+q)^{1.8},\ q > 0$.
- Tada, funkcija prosečnih troškova je

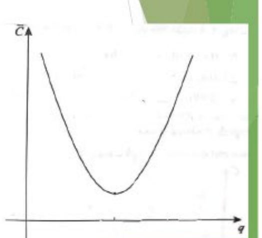
$$\overline{C} = \frac{620(1+q)^{1.8}}{q},\ q > 0$$

- Kako je $\frac{d\overline{C}}{dq} = \frac{620}{q^2}(1+q)^{0.08}(0.08q - 1) = 0$, za vrednost

$$q = \frac{1}{0.08} = 12.5$$

funkcija prosečnih troškova dostiže minimum:

$$\overline{C}_{min} = \overline{C}(12.5) = 824.6$$



23

Funkcija graničnih (marginalnih) troškova

- Pod uslovom da je funkcija ukupnih troškova $C = F(q)$ diferencijabilna u posmatranom intervalu kretanja obima proizvodnje q, tada funkciju graničnih (marginalnih) troškova definišemo sa

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{dC}{dq} = C' = F'(q)$$

- $C' = F'(q)$ pokazuje iznos promene ukupnih troškova do koje dolazi usled jedinične promene obima proizvodnje sa datog nivoa.
- Kako u tački $q_0 = \frac{F(q_0)}{F'q_0} = \frac{C(q_0)}{C'(q_0)}$ funkcija prosečnih troškova $\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{F(q)}{q}$ dostiže svoju minimalnu vrednost odnosno $\overline{C}_{min} = \overline{C}(q_0) = \frac{C(q_0)}{q_0}$ neposredno dobijamo da je

$$C'(q_0) = \frac{C(q_0)}{q_0} = \overline{C}(q_0) = \overline{C}_{min}$$

odnosno za obim proizvodnje q_0, za koji su prosečni troškovi minimalni, ostvaruju se jednakost graničnih i prosečnih troškova.

24

Odnos graničnih i prosečnih troškova

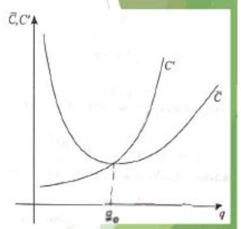
- $C' = F'(q_0) = \frac{F(q_0)}{q_0} = \overline{C}(q_0) = \overline{C}_{min}$ odnosno za nivo proizvodnje q_0 prosečni troškovi su minimalni.
- Za nivo proizvodnje q iz intervala
  - $q \in (0, q_0)$

    $$C' = F'(q) < \frac{F(q)}{q} = \overline{C}$$

    granični troškovi su relativno niski, te jedinično povećanje obima proizvodnje sa bilo kog nivoa iz intervala $(0, q_0)$ dovodi do smanjenja prosečnih troškova.
  - $q \in (q_0, +\infty)$

    $$C' = F'(q) > \frac{F(q)}{q} = \overline{C}$$

    granični troškovi su relativno visoki, te jedinično povećanje obima proizvodnje sa bilo kog nivoa iz intervala$(q_0, +\infty)$ dovodi do povećanja prosečnih troškova.



25

Primer: Dostizanje jednakosti $C' = \overline{C}$

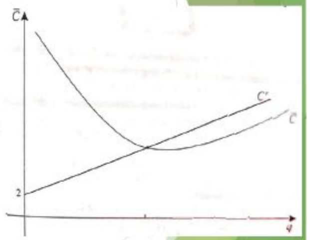
- Za datu funkciju ukupnih troškova

  $$C = 3q^2 + 2q + 300,$$

  funkcija prosečnih troškova je:

  $$\overline{C} = 3q + 2 + \frac{300}{q}$$
- Kako je $\overline{C}' = 3 - \frac{300}{q^2} = 0$ za $q = 10 > 0$ dobijamo da je $\overline{C}_{min} = \overline{C}(10) = 62.$
- Sa druge strane, funkcija graničnih troškova je $C' = 6q + 2$ i

  $$C'(10) = 60 + 2 = 62 = \overline{C}_{min}$$



26

6. Funkcija profita (dobiti)

- Istovremenim posmatranjem
  - funkcije ukupnih prihoda $R = q \cdot \varphi(q)$, i
  - funkcije ukupnih troškova $C = F(q)$

  možemo definisati **funkciju profita**

  $$\pi(q) = R(q) - C(q) = q \cdot \varphi(q) - F(q)$$

  gde je q obim proizvodnje (tražnje) posmatranog proizvoda.
- Rentabilna je ona proizvodnja za koju se ostvaruje pozitivan profit, odnosno za koju je $\pi(q) > 0$ što znači za koju je

  $$R(q) > C(q).$$
- Granice intervala rentabilnosti određene su iz uslova:

  $$R(q) = C(q) \text{ odnosno } \pi(q) = 0.$$

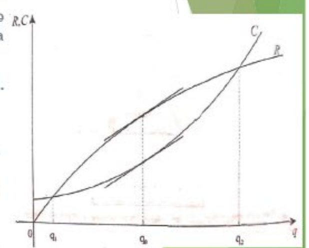
27

Optimalan nivo proizvodnje

- Nivo proizvodnje q_0 za koji se ostvaruje maksimalan profit određuje se iz uslova

  $$\pi'(q) = 0 \text{ odnosno } R'(q) = C'(q),$$

  i naziva se **optimalan nivo proizvodnje.**
- Neka je $0 < q_1 \leq q \leq q_2$ interval rentabilnosti. Tada za:
  - $q_1 \leq q < q_0$, $R'(q) > C'(q)$ odnosno ukupan prihod ima brži rast od ukupnih troškova;
  - $q_0 < q \leq q_2$, $R'(q) < C'(q)$ odnosno ukupni troškovi brže rastu od ukupnih prihoda;
  - $q \in (0, q_1) \cup (q_2, +\infty)$, proizvodnja je nerentabilna odnosno ostvaruje se gubitak.



28

Primer

- Ako je $C = 3q^2 + 330$ funkcija ukupnih troškova proizvodnje izvesnog proizvoda čija je funkcija tražnje $q = -0.5p + 87.5$, odrediti:

  a) interval rentabiliteta tog proizvoda;

  b) optimalan obim proizvodnje i maksimalan profit;

  c) profit pri minimalnim prosečnim troškovima.
- Rešenje:
- a) Granice intervala rentabilnosti određuju se iz uslova $R(q) = C(q)$, gde je $R(q) = p \cdot q = (-2q + 175) \cdot q = -2q^2 + 175q$ jer $2q = -p + 175$, a $C(q) = 3q^2 + 330.$
  - Odatle, $-2q^2 + 175q = 3q^2 + 330$ odnosno $5q^2 - 175q + 330 = 0$ što se svodi na $q^2 - 35q + 66 = 0$ čije su nule $q_1 = 2$ i $q_2 = 33.$
  - Znači, interval rentabiliteta proizvodnje je $2 < q < 33.$

29

Natavak rešenja

- b) **Optimalan obim proizvodnje** za koji se ostvaruje **maksimalan profit** određuje se iz uslova $\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 0$, odnosno u ovom slučaju iz $(-5q^2 + 175q - 330)' = 0$ što znači iz $-10q + 175 = 0.$
  - Odatle za $q = 17.5$ postiže se maksimalan profit

    $$\pi(17.5) = R(17.5) - C(17.5) = -5(17.5)^2 + 175(17.5) - 330 = 1201.25$$
- c) Kako je **funkcija prosečnih troškova** $\overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3q^2+330}{q} = 3q + \frac{330}{q}$, to se obim proizvodnje, za koji se ostvaruju minimalni prosečni troškovi, dobija iz $\overline{C}'(q) = 3 - \frac{330}{q^2} = 0$ odnosno iz $q^2 = 110.$
  - Kako je $q > 0$, to za $q = 10.49$, dobijaju se minimalni prosečni troškovi $\overline{C}_{min} = \overline{C}(10.49)$
  - Za dobijenu vrednost obima proizvodnje, $q = 10.49$, profit iznosi

    $$\pi(10.49) = R(10.49) - C(10.49) = -5(10.49)^2 + 175(10.49) - 330 = 955.55$$

30

POSLOVNA MATEMATIKA
Predavač: mr Tatjana Bajić

11 Uvod u finansijsku matematiku

11.1 Procentni račun

11.2 Interesni (kamatni) račun

11.3 Faktor dodajnih uloga

Literatura

1. Branislav Boričić, Miodrag Ivović, Mirjana Ilić, Jelena Stanojević (2020): *Matematika*, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
2. Ivana Kovačević, Ana Savić (2006): *Poslovna matematika*, Viša elektrotehnička škola, Beograd.
3. Jelena Kočović (2001): *Finansijska matematika*, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
4. Dragica Krgović, Milena Jelić, Boško Damjanović (1992): *Zbirka zadataka iz matematike*, II deo, Naučna knjiga, Beograd.

POSLOVNA MATEMATIKA
Predavač: mr Tatjana Bajić

Poslovna matematika

11 Uvod u finansijsku matematiku
- 11.1 Procentni račun
- 11.2 Interesni (kamatni) račun
- 11.3 Faktor dodajnih uloga

Predavač: mr Tatjana Bajić

1. Procentni račun

- **Jedan procenat** nekog broja je stoti deo tog broja.
- Na primer:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$25\% = \frac{25}{100} = 0.25$$
$$0.25\% = \frac{0.25}{100} = \frac{25}{10000} = 0.0025$$
$$100\% = \frac{100}{100} = 1$$
$$150\% = \frac{150}{100} = 1.50$$

Glavnica, procentna stopa i procetni prinos

- Veličina koja služi kao **osnovica** na koju se izračunavaju povećanja, ili smanjenja za dati procenat, naziva se **glavnica** i najčešće se obeležava sa **G**.
- Broj koji pokazuje za koliko se stotih delova glavnice, glavnica povećava ili smanjuje, naziva se **procentnom stopom** (ili kraće samo **stopom**) i obeležava se sa **p**. Procentna stopa može biti izražena:
  - u procentima, p% ili
  - u decimalnom zapisu, $\mathbf{p \cdot 0.01}$.
- Veličina za koju se ukupno poveća ili smanji glavnica G, pri procentnoj stopi p, naziva se **procentni prinos** (ili kraće **prinos**) i obeležava se sa **P** .

Osnovna proporcija procentnog računa

- G : P = 100 : p odnosno G : P = 100% : p% = 1 : p% gde je
  - G - glavnica
  - P - procentni prinos
  - p - procentna stopa.
- Iz osnovne proporcije se primenom pravila o zbiru i razlici članova razmere dobijaju proporcije procentnog računa **više sto** (na sto), odnosno **niže sto** (u sto):

$$(G \pm P) : (100 \pm p) = G : 100$$
$$(G \pm P) : (100 \pm p) = P : p.$$

Primer 1.1

- Posle poskupljenja od 12% roba se prodaje za 7616 dinara. Izračunati:
  - a) Za koliko je dinara povećana cena?
  - b) Koliko bi iznosila prodajna cena, da je povećanje iznosilo 16% od prvobitne cene?
  - c) Za koliko bi procenata bila povećana cena da se roba posle povećanja cene prodaje za 7 800 dinara?
- Rešenje:

a) $\mathbf{7616 : (100+12)\% = \mathit{G} : 100\%}$ i odatle

$$G = \frac{7616}{112\%}100\% = \frac{8 \cdot 56 \cdot 17}{2 \cdot 56}100 = 4 \cdot 17 \cdot 100 = 6\,800 \text{ dinara}$$

što znači da se cena povećala za $\mathbf{7616 - 6800 = 816}$ dinara.

b) $\mathbf{(G+P) : (100+16)\% = 6800 : 100\%}$ i odatle

$$G + P = \frac{6800}{100\%}116\% = 68 \cdot 116 = 7\,888 \text{ dinara.}$$

c) $\mathbf{7800 : (100+\mathit{p})\% = 6800 : 100\%}$ i odatle

$$(100+p)\% = \frac{7800}{6800} \cdot 100\% = \frac{39}{34} \cdot 100\% = 114.7\% = (100+14.7)\% \text{ odnosno } p\% = 14.7\%.$$

Primer 1.2

- Posle sniženja od 12% roba se prodaje za 6336 dinara. Za koliko procenata treba povećati novu cenu robe da bi se roba predavala po prethodnoj ceni?
- Rešenje:
- $\mathbf{6336 : (100-12)\% = \mathit{G} : 100\%}$ i odatle početna cena je bila

$$G = \frac{6336}{88\%}100\% = \frac{8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11}{8 \cdot 11}100 = 7\,200 \text{ dinara}$$

- $\mathbf{7\,200 : (100+\mathit{p})\% = 6\,336 : 100\%}$ i odatle

$$(100+p)\% = \frac{7200}{6\,336}100\% = \frac{8 \cdot 9 \cdot 100}{8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11}100\% = 113.63\% = (100+13.63)\%$$

odnosno novu cenu od 6 336 dinara treba povećati za 13.63% da bi se dobila prvobitna cena.

2. Interesni (kamatni) račun

2.1 Prost interesni račun
2.2 Složen interesni račun
- 2.2.1 Dekurzivno računanje interesa
- 2.2.2 Anticipativno računanje interesa

7

Kapital, interes (kamata), interesna (kamatna) stopa

- **Kreditni odnosi** se uspostavljaju izmedju **dužnika i poverioca**, a nastaju kada dužnik, pod određenim ugovornim uslovima, od poverioca uzme izvesnu sumu novca na **zajam** odnosno **kredit**.
- **Ukupna pozajmljena suma**, na koju dužnik plaća poveriocu ugovorenu nadoknadu, naziva se **kapital** ili **glavnica**, i označava sa K.
- **Interes** ili **kamata**, u oznaci i, je novčani iznos koji dužnik plaća poveriocu kao nadoknadu (cenu) za korišćenje pozajmljenog novca za odredjeno vreme.
  - Interes se ugovara na sumu koju će dužnik platiti poveriocu godišnje za svakih 100 novčanih jedinica kapitala (K) i plaća se sve dotle dokle se koristi poveriočev novac.
- **Interesna stopa** ili **kamatna stopa**, u oznaci **p**, pokazuje koliko se novčanih jedinica plaća na svakih 100 novčanih jedinica kapitala **K** za godinu dana.
  - Interesna (kamatna) stopa se obično izražava u procentima.

8

Interesni račun

- Osnovna razlika izmedju procentnog računa i interesnog računa je u tome što **interesni račun uključuje** još jednu veličinu - **vreme**, u oznaci **t**.
- Vreme upotrebe kapitala (t) može biti dato u
  - godinama (g),
  - mesecima (m) i
  - danima (d).
- Interesni račun se deli na prost i složen.
  - Prost interesni račun je onaj kod koga se interes računa na istu osnovicu u svim obračunskim periodima.
  - Složen interesni račun je onaj kod koga se interes iz perioda u period računa na osnovicu uvećanu za kamatu iz prethodnog obračunskog perioda.

9

2.1 Prost interesni račun

- Kod prostog interesnog računa ako je **vreme (t) dato u godinama**, proporcija $\mathbf{G} : \boldsymbol{P} = \mathbf{100} : \boldsymbol{p}$ sa nešto izmenjenim simbolima je oblika

$$\mathbf{K} : \boldsymbol{i} = \mathbf{100} : \boldsymbol{pg}$$

gde je
  - K - kapital ili glavnica
  - i - interes ili kamata
  - p - interesna ili kamatna stopa (na godišnjem nivou)
  - g - vreme dato u godinama.
- Naime, kako je kamatna stopa **p** data na godišnjem nivou, to ako je **i** interes na **g** godina, onda je **i/g** interes na **godina dana** i važi

$\mathbf{K} : \frac{i}{g} = \mathbf{100} : \boldsymbol{p}$ odakle sledi $\mathbf{K} : \mathbf{100} = \frac{i}{g} : \boldsymbol{p}$ odnosno $\mathbf{K} : \mathbf{100} = \boldsymbol{i} : \boldsymbol{pg}$ 10

Izračunavanje interesa za obračunski period izražen u godinama ili mesecima

- Interesna stopa se izražava na godišnjem nivou i usklađuje se u zavisnosti od dužine obračunskog perioda koji može biti izražen u godinama, mesecima i danima.
- Iz proporcije $\mathbf{K} : \boldsymbol{i} = \mathbf{100} : \boldsymbol{pg}$ sledi da je $\boldsymbol{i} = \frac{Kpg}{100}$
- Za g = 1 iz $\boldsymbol{i} = \frac{Kpg}{100}$ imaćemo da je

$$i = \frac{Kp}{100}$$

- Odatle, interes za jedan mesec iznosi

$$i = \frac{Kp}{100} : 12 = \frac{Kp}{1200}$$

odnosno interes za m meseci je

$$i = \frac{Kp}{100} : 12 \cdot m = \frac{Kpm}{1200}$$

11

Izračunavanje interesa za obračunski period izražen u danima

- **Interes za 1 dan** se dobija kada $i = \frac{Kp}{100}$ podelimo sa 360 ili 365 u zavisnosti da li računamo da godina ima 360 ili 365 dana,

$$i = \frac{Kp}{100} : 360 = \frac{Kp}{36\,000} \qquad \text{ili} \qquad i = \frac{Kp}{100} : 365 = \frac{Kp}{36\,500}$$

- Za **d dana** interes će iznositi

$$i = \frac{Kpd}{36\,000} \qquad \text{ili} \qquad i = \frac{Kpd}{36\,500}$$

- Dani se mogu računati na više načina (tačnije na tri načina), pa stoga se mora unapred naglasiti kako se oni određuju.
  - U daljem radu podrazumevaćemo da godina ima 360 dana, a mesec 30 dana.
  - Kada su dati datumi smatraćemo da godina ima 360 dana i da se dani računaju po kalendaru.

12

Osnovne proporcije prostog interesnog računa

- Uzimajući u obzir na izračunavanje interesa

$$i = \frac{Kpm}{1200} \text{ i } i = \frac{Kpd}{36\,000},$$

pored proporcije

$$\mathrm{K} : i = 100 : pg \text{ odnosno } \mathrm{K} : i = 100\% : g \cdot p\%$$

možemo postaviti sledeće proporcije

$$\mathrm{K} : i = 1200 : pm \text{ odnosno } \mathrm{K} : i = 12 \cdot 100\% : m \cdot p\%$$

ako je vreme dato u mesecima i

$$\mathrm{K} : i = 36\,000 : pd \text{ odnosno } \mathrm{K} : i = 360 \cdot 100\% : d \cdot p\%$$

ako je vreme izraženo u danima.

- Navedene proporcije nazivaju se **osnovne proporcije prostog interesnog računa.**

13

Primer 2.1.1-2

- Koliko će se interesa platiti na 50 000 dinara za 4 meseca i kamatnom stopom od 12% na godišnjem nivou?
  - Rešenje:

$$50000 : i = 12 \cdot 100\% : 4 \cdot 12\%$$

$$i = \frac{50000 \cdot 12\% \cdot 4}{12 \cdot 100\%} = 500 \cdot 4 = 2000$$

- Za koje vreme će kapital od 168 000 dinara i kamatnom stopom od 7% doneti interes od 23 520 dinara?
  - Rešenje:

$$168\,000 : 23\,520 = 100\% : g \cdot 7\%$$

$$\mathrm{g} \cdot 7\% = \frac{23\,520 \cdot 100\%}{168\,000} = \frac{2352}{168}\% = \frac{2^4 \cdot 7 \cdot 21}{2^3 \cdot 21}\% = 2 \cdot 7\%$$

što znači za 2 godine.

14

Primer 2.1.3

- Koji će kapital za 3 meseca i 15 dana uz kamatnu stopu od 6% doneti 21 000 dinara na ime interesa?
- **Rešenje:**
- Ako računamo da mesec ima 30 dana, to znači da je obračunski period na $3 \cdot 30 + 15 = 105$ dana.
- Odatle, ako uzimamo da godina ima 360 dana, sledi da je

$$\mathrm{K} : 21\,000 = 360 \cdot 100\% : 105 \cdot 6\%, \text{ odnosno}$$

$$\mathrm{K} = \frac{21\,000 \cdot 360 \cdot 100\%}{105 \cdot 6\%} = \frac{21\,000 \cdot 6\,000}{5 \cdot 21} = 1\,200\,000$$

15

2.2 Složen interesni račun

- Pod složenim interesom podrazumeva se interes koji se dobija kada se interes, koji donosi kapital za odredjeno vreme, dodaje kapitalu i zajedno sa njim donosi interes.
- Dodavanje interesa kapitalu zove se **kapitalisanje.**
- U praksi obračunski periodi su obično na godišnjem, polugodišnjem, tromesečnom ili mesečnom nivou.
- Odnosno, kamata (interes) se najčešće obračunava:
  - godišnje (per anum) i označava sa pa
  - polugodišnje (per semestre) i označava sa ps
  - tromesečno (per quartale) i označava sa pq
  - mesečno (per mensem) i označava sa pm.

16

Dekurzivno i anticipativno računanje interesa

- Postoje dva načina računanja složenog interesa: **dekurzivno i anticipativno.**
  - Ako se izračunavanje i odobravanje interesa vrši krajem svakog obračunskog perioda (interes se dobija od kapitala sa početka obračunskog perioda), tada se takvo računanje interesa naziva dekurzivnim i obeležava se slovom (d) uz interesnu stopu.
  - Ako se izračunavanje i odobravanje interesa vrši unapred od kapitala, početkom svakog obračunskog perioda (interes se unapred dobija od kapitala sa kraja obračunskog perioda) to se zove anticipativno računanje interesa i obeležava se slovom (a) uz interesnu stopu.
- Vrednost kapitala koja se daje pod interes naziva se **sadašnja vrednost** kapitala i obeležava se sa K_0.
- Vrednost na koju narasta kapital dat pod interes na interes za **n obračunskih perioda** naziva se **krajnja vrednost kapitala** ili **kapital uvećan za interes** i obeležava se sa K_n.

17

2.2.1 Dekurzivno računanje interesa

- Ako je kapital od K_0 dinara dat pod interes na interes za **n godina uz p%(pa) i godišnje kapitalisanje**, tada krajnja vrednost kapitala K_n uz **dekurzivno računanja interesa** posle n-te godine iznosiće

$$K_n = K_0 \cdot r^n$$

gde je $r = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$ **dekurzivni interesni faktor.**

- Naime, kapital **posle prve godine** iznosiće

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p\% = K_0(1 + p\%) = K_0 r$$

posle druge,

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot p\% = K_1(1 + p\%) = K_1 r = K_0 r^2$$

posle treće,

$$K_3 = K_2 + K_2 \cdot p\% = K_2(1 + p\%) = K_2 r = K_0 r^3$$

itd., **posle n-te godine**

$$K_n = K_0 r^n$$

18

Dekurzivno računanje interesa kada se kapitalisanje vrši više puta godišnje

- Analognim rasuđivanjem dobijamo da ako se kapitalisanje vrši m puta godišnje, tada se krajnja vrednost kapitala K_{mn} uz dekurzivno računanja interesa može odrediti iz

$$K_{mn} = K_0 \cdot r^{mn}$$

gde je $r = 1 + \frac{p}{m}\% = 1 + \frac{p}{100m}$ dekurzivni interesni faktor

i p% je kamatna stopa na godišnjem nivou, tj. p%(pa).

- Naime, imamo $m \cdot n$ obračunskih perioda gde se posle svakog i -tog obračunaskog perioda, $i = 1, 2, 3, \ldots, mn$, kapital K_{i-1} uvećava za

$$\frac{p}{m}\% \cdot K_{i-1}$$

- Odatle,

$$K_i = K_{i-1} + \frac{p}{m}\% \cdot K_{i-1} = K_{i-1}\left(1 + \frac{p}{m}\%\right) = K_{i-1}r = K_0 \cdot r^i$$

19

Primer 2.2.1.1-2

- Neko uloži $K_0 = 70\,000$ dinara uz godišnju kamatnu stopu $p\% = 5\%(d)$. Koliko će imati posle 4 godine ako je kapitalisanje godišnje?
  - Rešenje:

$$K_4 = K_0 \cdot r^4 = 70\,000 \cdot (1 + 5\%)^4 = 70\,000 \cdot (1.05)^4 = 85\,085.4375$$

- Koliko dinara treba uložiti da bi se posle 7 godina uz kamatnu stopu $p\% = 7.5\%(d)$ i godišnje kapitalisanje imalo 532 800 dinara?
  - Rešenje:

$K_7 = K_0 \cdot r^7 = K_0 \cdot (1 + 7.5\%)^7 = K_0 \cdot (1.075)^7 = 532\,800$ i odatle

$$K_0 = \frac{532\,800}{(1.075)^7} \approx 321\,147.82$$

20

Primer 2.2.1.3

- Neko uloži 356 000 dinara uz godišnju kamatnu stopu $p\% = 24\%(d)$. Koliko će imati posle 8 godina ako je kapitalisanje 2 puta godišnje?
- **Rešenje:**
- $K_0 = 356\,000$, $r = 1 + \frac{24}{2}\% = 1 + 0.12 = 1.12$, $m \cdot n = 2 \cdot 8 = 16$
- $K_{16} = K_0 \cdot r^{16} = 356\,000 \cdot \left(1 + \frac{24}{2}\%\right)^{16} = 356\,000 \cdot (1.12)^{16} \approx$ **2182 420.14** dinara.

21

2.2.2 Anticipativno računanje interesa

- Ako je kapital od K_0 dinara dat pod interes na interes za n godina uz
  - kamatnu stopu od q%(pa) i
  - godišnje kapitalisanje,

tada krajnja vrednost kapitala K_n uz **anticipativno računanja** interesa posle n-te godine iznosiće

$$K_n = K_0 \cdot \rho^n$$

gde je

$$\rho = \frac{1}{1 - q\%} = \frac{100}{100 - q}$$

anticipativni interesni faktor.

22

Objašnjenje

- Naime, kako je

$$K_0 = K_1 - K_1 q\% = K_1(1 - q\%) = K_1 \frac{100 - q}{100}$$

sledi da će kapital posle prve godine iznositi

$$K_1 = K_0 \cdot \frac{100}{100 - q} = K_0 \cdot \rho$$

- Slično,

$$K_1 = K_2 - K_2 q\% = K_2(1 - q\%) = K_2 \frac{100 - q}{100}$$

te će kapital posle druge godine biti

$$K_2 = K_1 \cdot \frac{100}{100 - q} = K_1 \cdot \rho = K_0 \cdot \rho^2$$

- Odatle,

$$\begin{aligned} K_{n-1} &= K_n - K_n q\% \\ &= K_n(1 - q\%) \\ &= K_n \tfrac{100-q}{100} \end{aligned}$$

pa posle n-te godine

$$\begin{aligned} K_n &= K_{n-1} \cdot \frac{100}{100 - q} \\ &= K_{n-1} \cdot \rho \\ &= K_0 \cdot \rho^n \end{aligned}$$

23

Anticipativno računanje interesa kada se kapitalisanje vrši više puta godišnje

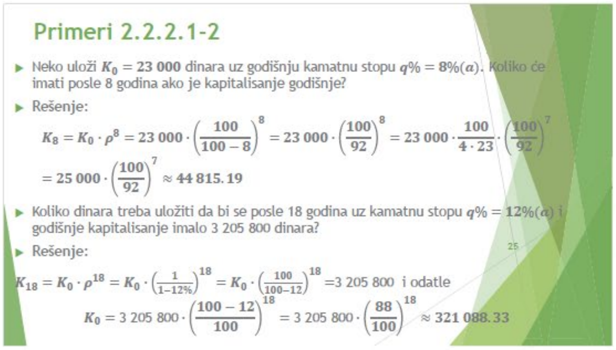
- Analognim rasuđivanjem dobijamo da ako se kapitalisanje vrši **m puta godišnje**, tada se krajnja vrednost kapitala K_{mn} uz anticipativno računanja interesa može odrediti iz

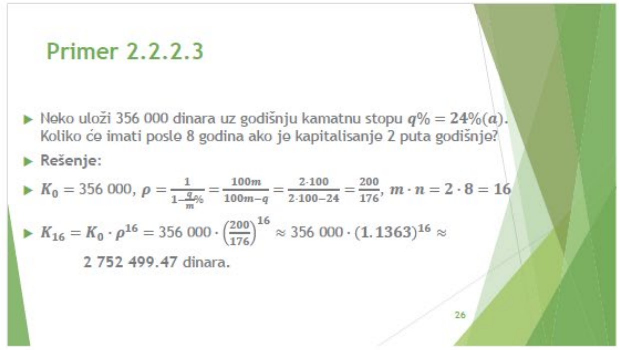
$$K_{mn} = K_0 \cdot \rho^{mn}$$

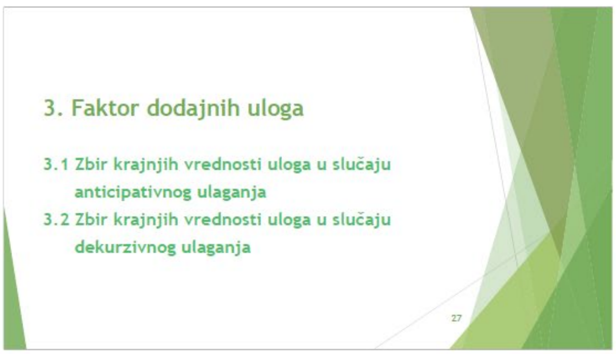
gde je $\rho = \frac{1}{1 - \frac{q}{m}\%} = \frac{100m}{100m - q}$.

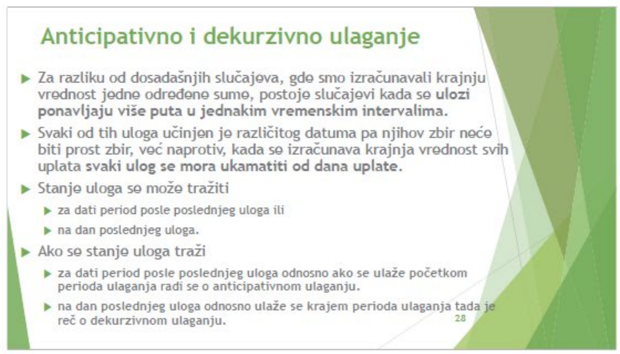
- **Napomena:** Vrednosti anticipativno i dekurzivno izračunatih interesa se razliku.

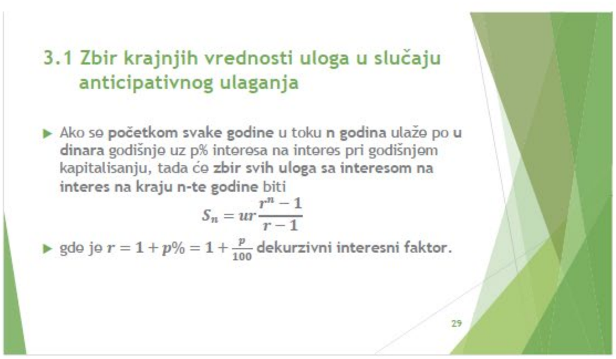
24

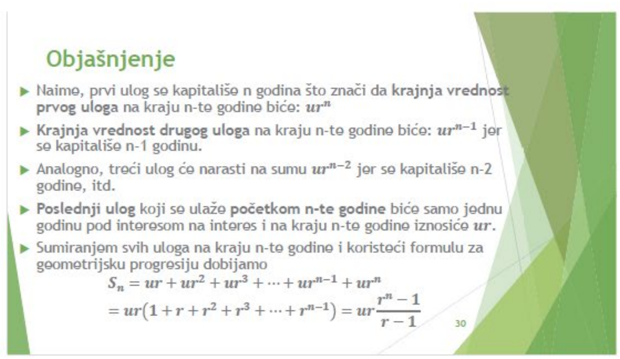

Primeri 2.2.2.1-2
Neko uloži $K_0 = 23\,000$ dinara uz godišnju kamatnu stopu $q\% = 8\%(a)$. Koliko će imati posle 8 godina ako je kapitalisanje godišnje?
Rešenje:
$K_8 = K_0 \cdot \rho^8 = 23\,000 \cdot \left(\frac{100}{100-8}\right)^8 = 23\,000 \cdot \left(\frac{100}{92}\right)^8 = 23\,000 \cdot \frac{100}{4 \cdot 23} \cdot \left(\frac{100}{92}\right)^7$
$= 25\,000 \cdot \left(\frac{100}{92}\right)^7 \approx 44\,815.19$
Koliko dinara treba uložiti da bi se posle 18 godina uz kamatnu stopu $q\% = 12\%(a)$ i godišnje kapitalisanje imalo 3 205 800 dinara?
Rešenje:
$K_{18} = K_0 \cdot \rho^{18} = K_0 \cdot \left(\frac{1}{1-12\%}\right)^{18} = K_0 \cdot \left(\frac{100}{100-12}\right)^{18}$ =3 205 800 i odatle
$K_0 = 3\,205\,800 \cdot \left(\frac{100-12}{100}\right)^{18} = 3\,205\,800 \cdot \left(\frac{88}{100}\right)^{18} \approx 321\,088.33$
25


Primer 2.2.2.3
Neko uloži 356 000 dinara uz godišnju kamatnu stopu $q\% = 24\%(a)$. Koliko će imati posle 8 godina ako je kapitalisanje 2 puta godišnje?
Rešenje:
$K_0 = 356\,000$, $\rho = \frac{1}{1-\frac{q}{m}\%} = \frac{100m}{100m-q} = \frac{2 \cdot 100}{2 \cdot 100 - 24} = \frac{200}{176}$, $m \cdot n = 2 \cdot 8 = 16$
$K_{16} = K_0 \cdot \rho^{16} = 356\,000 \cdot \left(\frac{200}{176}\right)^{16} \approx 356\,000 \cdot (1.1363)^{16} \approx$
2 752 499.47 dinara.
26


3. Faktor dodajnih uloga
3.1 Zbir krajnjih vrednosti uloga u slučaju anticipativnog ulaganja
3.2 Zbir krajnjih vrednosti uloga u slučaju dekurzivnog ulaganja
27


Anticipativno i dekurzivno ulaganje
Za razliku od dosadašnjih slučajeva, gde smo izračunavali krajnju vrednost jedne određene sume, postoje slučajevi kada se ulozi ponavljaju više puta u jednakim vremenskim intervalima.
Svaki od tih uloga učinjen je različitog datuma pa njihov zbir neće biti prost zbir, već naprotiv, kada se izračunava krajnja vrednost svih uplata svaki ulog se mora ukamatiti od dana uplate.
Stanje uloga se može tražiti
za dati period posle poslednjeg uloga ili
na dan poslednjeg uloga.
Ako se stanje uloga traži
za dati period posle poslednjeg uloga odnosno ako se ulaže početkom perioda ulaganja radi se o anticipativnom ulaganju.
na dan poslednjeg uloga odnosno ulaže se krajem perioda ulaganja tada je reč o dekurzivnom ulaganju.
28


3.1 Zbir krajnjih vrednosti uloga u slučaju anticipativnog ulaganja
Ako se početkom svake godine u toku n godina ulaže po u dinara godišnje uz p% interesa na interes pri godišnjem kapitalisanju, tada će zbir svih uloga sa interesom na interes na kraju n-te godine biti
$S_n = ur\frac{r^n - 1}{r - 1}$
gde je $r = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$ dekurzivni interesni faktor.
29


Objašnjenje
Naime, prvi ulog se kapitališe n godina što znači da krajnja vrednost prvog uloga na kraju n-te godine biće: ur^n
Krajnja vrednost drugog uloga na kraju n-te godine biće: ur^{n-1} jer se kapitališe n-1 godinu.
Analogno, treći ulog će narasti na sumu ur^{n-2} jer se kapitališe n-2 godine, itd.
Poslednji ulog koji se ulaže početkom n-te godine biće samo jednu godinu pod interesom na interes i na kraju n-te godine iznosiće ur.
Sumiranjem svih uloga na kraju n-te godine i koristeći formulu za geometrijsku progresiju dobijamo
$S_n = ur + ur^2 + ur^3 + \cdots + ur^{n-1} + ur^n$
$= ur(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) = ur\frac{r^n - 1}{r - 1}$
30

Faktor dodajnih uloga

- Ukoliko je vrednost uloga početkom svakog perioda ulaganja, u = 1 dinar, tada je zbir krajnjih vrednosti uloga posle n-te godine

$$S_n = r\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

- Izraz

$$r\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

naziva se faktor dodajnih uloga.

- Ukoliko se početkom svakog perioda ulaganja ulaže po u dinara pri čemu se kapitalisanje vrši m puta godišnje tada zbir krajnjih vrednosti uloga iznosi:

$$S_{mn} = ur\frac{r^{mn} - 1}{r - 1}$$

gde je $r = 1 + \frac{p}{m}\% = 1 + \frac{p}{100m}$.

31

Primer 3.1.1

- Neko ulaže **početkom svake godine** po 3000 dinara. Koliko će imati na kraju osme godine, ako se na ime interesa na interes računa interesna stopa od 20%d i ako je godišnje kapitalisanje?
- **Rešenje:**
- Postavka: $u = 3000$ dinara, $n = 8$ godina, $\mathrm{p}\% = 20\%(\mathrm{d})$
- $r = 1 + 20\% = 1 + 0.2 = 1.2$
- $S_8 = 3000 \cdot 1.2 \cdot \frac{(1.2)^8 - 1}{1.2 - 1} = 3000 \cdot \frac{12}{2} \cdot \left((1.2)^8 - 1\right) = 18000 \cdot (4.29981696 - 1) =$ **59 396.70528 dinara**

32

Primer 3.1.2

- Koji se iznos mora **početkom svake godine** ulagati u toku 6 godina da bi se uz interesnu stopu od 30%(d) i godišnje kapitalisanje na kraju šeste godine imalo 1235 000 dinara?
- **Rešenje:**
- Postavka: $n = 6$ godina, $\mathrm{p}\% = 30\%(\mathrm{d})$, $S_6 = 1\,235\,000$ dinara
- $r = 1 + 30\% = 1 + 0.3 = 1.3$
- $S_6 = u \cdot 1.3 \cdot \frac{(1.3)^6 - 1}{1.3 - 1} = \mathrm{u} \cdot \frac{13}{3} \cdot \left((1.3)^6 - 1\right) = u \cdot \frac{13}{3} \cdot 3.826809 = 1\,235\,000$
- $u = 1\,235\,000 \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{3.826809} = \frac{3 \cdot 95\,000}{3.826809} = 74\,474.581825223 \sim 74\,474.58$

33

Primer 3.1.3

- Na koju sumu će posle 9 godina porasti polugodišnji ulog, ako se **početkom svakog polugodišta** ulaže po 30 000 dinara uz 30%d interesa na interes i polugodišnje kapitalisanje?
- **Rešenje:**
- Postavka: $u = 30\,000$ dinara, $n = 9$ godina, $m = 2$, $\mathrm{p}\% = 30\%(\mathrm{d})$
- $r = 1 + \frac{30}{2}\% = 1 + 15\% = 1 + 0.15 = 1.15$
- $S_{18} = 30000 \cdot 1.15 \cdot \frac{(1.15)^{18} - 1}{1.15 - 1} = 30000 \cdot \frac{115}{15} \cdot \left((1.15)^{18} - 1\right) = 2000 \cdot 115 \cdot 11.3754536053 = 2\,616\,354.329219$

34

Primer 3.1.4

- Koliko se mora ulagati **početkom svakog polugodišta**, da bi se posle 5 godina uz 18%(d) interesa i polugodišnje kapitalisanje imalo 123 000 dinara?
- **Rešenje:**
- Postavka: $n = 5$ godina, $m = 2$, $\mathrm{p}\% = 18\%(\mathrm{d})$, $S_{10} = 123\,000$ dinara
- $r = 1 + \frac{18}{2}\% = 1 + 9\% = 1 + 0.09 = 1.09$
- $S_{10} = u \cdot 1.09 \cdot \frac{(1.09)^{10} - 1}{1.09 - 1} = \mathrm{u} \cdot \frac{109}{9} \cdot \left((1.09)^{10} - 1\right) = u \cdot \frac{109}{9} \cdot 2.3673636746 = 123\,000$
- $u = 123\,000 \cdot \frac{9}{109} \cdot \frac{1}{2.3673636746} = \frac{10\,155.963302752}{2.3673636746} = 4\,289.9886535043 \approx 4\,289.99$

35

3.2 Zbir krajnjih vrednosti uloga u slučaju dekurzivnog ulaganja

- Ako se tokom n godina **krajem svake godine** ulaže po **u dinara** godišnje uz **p% interesa na interes** pri godišnjem kapitalisanju, tada će zbir svih uloga sa interesom na interes na kraju n-te godine biti

$$\widehat{S}_n = u\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

gde je $r = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$ **dekurzivni interesni faktor.**

36

Objašnjenje

- Naime, kako se ulaganje vrši na kraju godine, prvi ulog se kapitališe n-1 godinu što znači da će **krajnja vrednost prvog uloga** na kraju n-te godine biti: ur^{n-1}.
- **Krajnja vrednost drugog uloga** na kraju n-te godine biće: ur^{n-2} jer se kapitališe n-2 godinu.
- Analogno, **treći ulog** će narasti na sumu ur^{n-3} jer se kapitališe n-3 godine, itd.
- **Poslednji ulog** koji se ulaže krajem n-te godine **ne kapitališe se** pa će njegova vrednost ostati nepromenjena, odnosno biće u.
- Sumiranjem svih uloga na kraju n-te godine i koristeći formulu za geometrijsku progresiju dobijamo
$$\widehat{S}_n = u + ur + ur^2 + ur^3 + \cdots + ur^{n-1} = u\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}\right) = u\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

37

Dekurzivno ulaganje i kapitalisanje više puta godišnje

- Slično, kao i u slučaju anticipativnog ulaganja, i kod dekurzivnog ulaganja ako se **krajem svakog perioda ulaganja** ulaže po **u dinara** i kapitalisanje se vrši **m puta godišnje** tada zbir krajnjih vrednosti uloga iznosi:
$$\widehat{S}_{mn} = u\frac{r^{mn} - 1}{r - 1}$$
gde je $r = 1 + \frac{p}{m}\% = 1 + \frac{p}{100m}$.

38

Primer 3.2.1

- Koja će se suma dobiti na kraju 30-e godine, ako se **krajem svake godine ulaže** po 5 100 dinara uz 10%(d) kamate na ime interesa na interes i godišnje kapitalisanje?
- **Rešenje:**
- Postavka: $u = 5\,100$ dinara, $n = 30$ godina, p% = 10%(d)
- $r = 1 + 10\% = 1 + 0.1 = 1.1$
- $\widehat{S}_{30} = 5100 \cdot \frac{(1.1)^{30} - 1}{1.1 - 1} = 5100 \cdot \frac{10}{1} \cdot \left((1.1)^{30} - 1\right) \approx$
$51\,000 \cdot (17.4494 - 1) \approx 838\,919.5157132$ **dinara**

39

Primer 3.2.2

- Koliko treba ulagati **krajem svake godine** u toku 13 godina uz interesnu stopu od 25%(d) i godišnje kapitalisanje da bi se na dan poslednjeg uloga imalo 632100 dinara?
- **Rešenje:**
- Postavka: $n = 30$ godina, $\mathrm{p}\% = 25\%(\mathrm{d})$, $S_{13} = 632\,100$ dinara
- $r = 1 + 25\% = 1 + 0.25 = 1.25$
- $\widehat{S}_{13} = u \cdot \frac{(1.25)^{13} - 1}{1.25 - 1} = \mathrm{u} \cdot \frac{100}{25} \cdot \left((1.25)^{13} - 1\right) = u \cdot 4 \cdot \left((1.25)^{13} - 1\right) = 632\,100$
- $u = \frac{632100}{4 \cdot \left((1.25)^{13} - 1\right)} \approx \frac{632100}{4 \cdot 17.189894} = \frac{158025}{17.189894} \approx 9\,192.901364 \approx 9\,193$ dinara

40

Primer 3.2.3

- Koja će se suma dobiti na dan poslednjeg ulaganja, ako se **krajem svakog polugodišta** u toku 11 godina uz polugodišnje kapitalisanje i 10%(d) interesa na interes ulaže po 2 500 dinara?
- **Rešenje:**
- Postavka: $u = 2\,500$ dinara, $n = 11$ godina, $m = 2$, p% = 10%(d)
- $r = 1 + \frac{10}{2}\% = 1 + 0.05 = 1.05$
$$\widehat{S}_{22} = 2500 \cdot \frac{(1.05)^{22} - 1}{1.05 - 1} = 2500 \cdot \frac{100}{5} \cdot \left((1.05)^{22} - 1\right) = 50\,000 \cdot \left((1.05)^{22} - 1\right) \approx 96,263.035996 \approx 96\,263$$

41

Primer 3.2.4

- Koliko se mora ulagati **krajem svakog polugodišta** da bi se posle 17 godina uz 24%(d) interesa na interes i polugodišnje kapitalisanje na dan poslednjeg uloga imalo 132 132 dinara?
- **Rešenje:**
- Postavka: $n = 17$ godina, $m = 2$, $\mathrm{p}\% = 24\%(\mathrm{d})$, $\widehat{S}_{34} = 132\,132$ dinara
- $r = 1 + \frac{24}{2}\% = 1 + 12\% = 1 + 0.12 = 1.12$
- $\widehat{S}_{34} = u \cdot \frac{(1.12)^{34} - 1}{1.12 - 1} = \mathrm{u} \cdot \frac{100}{12} \cdot \left((1.12)^{34} - 1\right) = \mathrm{u} \cdot \frac{25}{3} \cdot \left((1.12)^{34} - 1\right) = 132\,132$
$$u = \frac{3 \cdot 132132}{25 \cdot \left((1.12)^{34} - 1\right)} = \frac{15\,855.84}{\left((1.12)^{34} - 1\right)} \approx \frac{15\,855.84}{46.1425} \approx 343.627675 \approx 343.63$$

42

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek za medicinske i poslovno-tehnološke studija

POSLOVNA MATEMATIKA
Predavač: mr Tatjana Bajić

12 Uvod u finansijsku matematiku – Krediti

Literatura

1. Branislav Boričić, Miodrag Ivović, Mirjana Ilić, Jelena Stanojević (2020): *Matematika*, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
2. Ivana Kovačević, Ana Savić (2006): *Poslovna matematika*, Viša elektrotehnička škola, Beograd.
3. Jelena Kočović (2001): *Finansijska matematika*, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
4. Dragica Krgović, Milena Jelić, Boško Damjanović (1992): *Zbirka zadataka iz matematike*, II deo, Naučna knjiga, Beograd.

Poslovna matematika

12 Uvod u finansijsku matematiku - Krediti

12.1 Amortizacija zajma jednakim otplatama
12.2 Amortizacija zajma jednakim anuitetima
12.3 Obračun potrošačkih kredita

Predavač: mr Tatjana Bajić

1

Kredit

- Reč **kredit** potiče od latinske reči *credo* što znači *verujem, imam poverenja u nekog*.
- **Kredit** ili **zajam** predstavlja određeni imovinsko pravni odnos u kojem jedna strana (zajmodavac, poverioc) ustupa drugoj strani (zajmnoprimcu, dužniku) pravo raspolaganja novcem, što znači:
  - zajmodavac daje svoja privremeno slobodna novčana sredstva zajmoprimcu koje
  - zajmoprimac preuzima, koristi i vraća u ugovorenom vremenskom periodu, uvećana za složeni interes.
- Zajam u određenoj visini se uglavnom odobrava odjednom, a vraća se (otplaćuje) sa pripadajućom kamatom **višekratno** ili **anuitetima** u ugovorenom roku otplate.

2

Amortizacija zajma (kredita)

- Postepena otplata zajma prema unapred utvrđenom planu naziva se **amortizacija zajma**, a plan otplate - **plan amortizacije zajma.**
- Postoji više načina otplaćivanja (amortizacije) zajma:
  - otplatama, koje mogu biti jednake ili promenljive u smislu da rastu ili opadaju po aritmetičkoj ili geometrijskoj progresiji sa tim da se interes plaća posebno;
  - anuitetima koji sadrže otplatu i interes.
- Kako se kod srednjoročnih i dugoročnih kredita (zajmova koji se koriste dve i više godina) kamata najčešće otplaćuje zajedno sa glavnicom, uobičajno je da se ugovara **vraćanje kredita kroz određen broj rata čiji iznosi predstavljaju anuitete.**

3

Vremenski interval jednog otplatnog perioda. Vrste anuiteta

- Vremenski interval jednog otplatnog perioda, pored godine i meseca, može biti i bilo koji vremenski interval.
- Anuitet, kao i otplata u okviru anuiteta, može biti stalan, a može se i menjati po zakonu aritmetičke odnosno geometrijske progresije.
- Odatle, kredit se može amortizovati
  - jednakim ili nejednakim anuitetima, i u skladu sa tim
  - jednakim ili nejednakim otplatama u okviru anuiteta.
- Dogovorom izmedju dužnika i poverioca određuje se ne samo broj već i vrsta anuiteta.

4

12.1 Amortizacija kredita jednakim otplatama

- Ako se kredit od K dinara amortizuje kroz **n nejednakih anuiteta** u kojima su **otplate jednake**, u iznosu od $\frac{K}{n}$, i sa godišnjom kamatnom stopom od p%(d), tada interes (kamata) u
  - prvom otplatnom periodu iznosi $i_1 = Kp\%$
  - drugom otplatnom periodu iznosi $i_2 = \left(K - \frac{K}{n}\right)p\% = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot Kp\%$
  - trećem otplatnom periodu iznosi $i_3 = \left(K - \frac{2K}{n}\right)p\% = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot Kp\%$

$\vdots$

  - n-tom otplatnom periodu iznosi $i_n = \left(K - \frac{(n-1)K}{n}\right)p\% = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot Kp\%$

gde su otplatni periodi na godinu dana odnosno reč je o godišnjem kapitalisanju.

5

Anuiteti kod amortizacije kredita jednakim otplatama

- Odatle, u slučaju da su obračunski periodi na
  - godinu dana, tada interes koji pripada j-tom anuitetu $a_j = \frac{K}{n} + i_j,\ j = 1, 2, \ldots n,$ iznosi

$$i_j = \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)Kp\%$$

  - mesec dana, tada interes koji pripada j-tom anuitetu $a_j = \frac{K}{n} + i_j,\ j = 1, 2, \ldots n,$ iznosi

$$i_j = \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)K\frac{p}{12}\%$$

gde su **otplate** za svaki anuitet $a_j = \frac{K}{n} + i_j,\ j = 1, 2, \ldots n$ **jednake** i iznose $\frac{K}{n}$, a **anuiteti** $a_j = \frac{K}{n} + i_j,\ j = 1, 2, \ldots n,$ su **nejednaki** i za

- n-godišnjih rata iznose $a_j = \frac{K}{n} + \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)Kp\%, ,\ j = 1, 2, \ldots n$
- n-mesečnih rata iznose $a_j = \frac{K}{n} + \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)K\frac{p}{12}\%, ,\ j = 1, 2, \ldots n.$

6

Ukupna kamata kod amortizacije kredita jednakim otplatama

- **Ukupna kamata** kod amortizacije kredita sa jednakim otplatama koju dužnik daje poveriocu kroz
  - n godišnjih anuiteta iznosi $i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = \frac{n+1}{2} \cdot Kp\%$ jer

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$
$$= Kp\% + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Kp\% + \left(1 - \frac{2}{n}\right)Kp\% + \cdots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)Kp\%$$
$$= \left(n - \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))\right) \cdot Kp\% = (n - \frac{n(n-1)}{2n}) \cdot Kp\% = \frac{n+1}{2} \cdot Kp\%$$

  - n mesečnih anuiteta iznosi $i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = \frac{n+1}{2} \cdot K\frac{p}{12}\%$ jer

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$
$$= K\frac{p}{12}\% + \left(1 - \frac{1}{n}\right)K\frac{p}{12}\% + \left(1 - \frac{2}{n}\right)K\frac{p}{12}\% + \cdots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)K\frac{p}{12}\% = \frac{n+1}{2} \cdot K\frac{p}{12}\%$$

7

Odnos uzastopnih anuiteta kod amortizacije kredita jednakim otplatama

- Anuiteti kod amortizacije kredita sa n jednakih godišnjih otplata,

$$a_j = \frac{K}{n} + \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)Kp\%,\ j = 1, 2, \ldots n,$$

obrazuju **opadajuću aritmetičku progresiju** razlike $d = -\frac{K}{n}p\%$, jer

$$a_{j+1} - a_j = \frac{K}{n} + K\left(1 - \frac{j}{n}\right)p\% - \frac{K}{n} - K\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)p\%$$
$$= \left(1 - \frac{j}{n} - 1 + \frac{j-1}{n}\right)Kp\% = -\frac{K}{n}p\%$$

odnosno $a_1 = \frac{K}{n} + Kp\%$, $a_{j+1} = a_j - \frac{1}{n}Kp\% = a_1 - \frac{j}{n}Kp\%,\ j = 1, 2, \ldots n-1$

8

Primer 4.1.1: Amortizacioni plan otplate kredita od 100 000 dinara uzetog na 5 godina sa kamatnom stopom od 8%(pa) i godišnjim kapitalisanjem jednakim otplatama

Godina	Stanje duga	Interes (kamata)	Otplata	Anuitet
j	$K - (j-1)\frac{K}{n}$ $= 100\,000 - (j-1) \cdot 20\,000$	$i_j = \left(1 - \frac{j-1}{5}\right)100\,000 \cdot 8\%$ $= \left(1 - \frac{j-1}{5}\right)8\,000 = (6-j)1600$	$\frac{K}{n} = \frac{100\,000}{5}$ $= 20\,000$	$a_j = \frac{K}{n} + i_j$
1.	100 000	8 000	20 000	28 000
2.	80 000	6 400	20 000	26 400
3.	60 000	4 800	20 000	24 800
4.	40 000	3 200	20 000	23 200
5.	20 000	1 600	20 000	21 600
Ukupno		24 000	100 000	124 000

9

Povoljnost amortizacija zajma jednakim anuitetima

- Međutim, **otplaćivanje zajma jednakim otplatama** za dužnika je **nepovoljno** jer u početnim otplatnim periodima biće opterećen visokim **anuitetima**.
- Naime, **otplate su jednake** u svim dogovorenim otplatnim periodima ali pošto je **glavnica na koju se računa interes u početnim obračunskim periodima visoka**, posledično će tada i anuiteti biti visoki.
- Odatle, za dužnika je povoljnija amortizacija zajma **jednakim anuitetima** jer se sav teret amortizacije ravnomerno deli na ceo period amortizacije.

10

12.2 Amortizacija kredita jednakim anuitetima

- Amortizacija kredita (zajma) metodom jednakih anuiteta je način da dužnik poveriocu vrati dug (pozajmljeni iznos) tako što će krajem svakog obračunskog perioda plaćati poveriocu uvek **istu vrednost anuiteta** koji se sastoje od
  - dela otplate i
  - interesa na ostatak duga.
- Međutim, dok je vrednost anuiteta uvek ista tokom perioda otplate, **vrednosti otplate** i **interesa** na ostatak duga u okviru anuiteta **se menjaju.**
- Postavlja se pitanje kako izračunati vrednost anuiteta kojim će se amortizovati (otplatiti) kredit zajedno sa pripadajućom kamatom kroz ugovoreni broj otplatnih perioda?

11

Osnovna pretpostavka i oznake

- **Osnovna pretpostavka:** Razmatramo model amortizacije kredita jednakim anuitetima u kome se
  - kapitalisanje pozajmljenog novca i
  - isplata anuiteta

vrši krajem istog obračunskog perioda, odnosno **broj anuiteta se poklapa sa brojem kapitalisanja.**

- **Napomena:** U praksi se dešava da broj anuiteta bude veći ili manji od broja kapitalisanja, odnosno uplata anuiteta je češća ili ređa od kapitalisanja, a uobičajno je da bude češća.
- **Na primer**, kod stambenih kredita, anuiteti se najčešće obračunavaju i plaćaju krajem svakog meseca u toku **n** godina, a kapitalisanje je godišnje sa interesnom stopom od **p%(pa)d.**

12

Postavka problema

- Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da se kredit od K **dinara** otplaćuje **jednakim anuitetima krajem svake godine** u toku **n godina** sa interesnom stopom od p%(pa)d, odnosno obračunski period je na godinu dana.
- Uvodimo oznake:
  - K - vrednost ukupnog duga
  - $p\%$ - interesna stopa na godišnjem nivou
  - a - anuitet
  - b_j - vrednost otplate u j-tom periodu otplate,
  - i_j - vrednost interesa u j-tom periodu otplate
  - n - ukupan broj perioda otplate duga (obračunskih perioda)
- Budući da se **vrednost anuiteta** sastoji od **dela otplate** (b_j) i **interesa na ostatak duga** (i_j), uzimajući u obzir uvedene oznake, imamo da je

$$a = b_j + i_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

13

Iznos preostalog duga

- U cilju izrade amortizacionog plana otplate kredita jednakim anuitetima razmatramo:
  - Iznos preostalog duga
  - Interes na ostatak duga
  - Zbir svih interesa i svih otplata
- Iznos preostalog duga $K_j, j = 1, 2, \ldots, n,$ u
  - prvom periodu otplate je $K_1 = K$
  - drugom periodu otplate je $K_2 = K_1 - b_1 = K - b_1$
  - trećem periodu otplate je $K_3 = K_2 - b_2 = K - b_1 - b_2 = K - (b_1+b_2)$ itd.
  - n-tom periodu otplate je $K_n = K_{n-1} - b_{n-1} = K - (b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})$
- Kako je $K = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n$, iz

$$K_n = K - (b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})$$

sledi $K_n = b_n$.

14

Interes na ostatak duga. Zbir svih interesa i svih otplata

- Interes na ostatak duga u
  - prvom periodu otplate je $i_1 = K_1 p\% = Kp\%$
  - drugom periodu otplate je $i_2 = K_2 p\%$
  - trećem periodu otplate je $i_3 = K_3 p\%$ itd.
  - n-tom periodu otplate je $i_n = K_n p\%$
- Odatle, $i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-1} + i_n = (K_1 + K_2 + \cdots + K_{n-1} + K_n)p\%$.
- Kako je $a = b_j + i_j, j = 1, 2, \ldots, n$, neposredno sledi da je

$$(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n) + (i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}+i_n) = na$$

15

Amortizacioni plan otplate kredita jednakim anuitetima

Periodi otplaćivanja	Iznos preostalog duga	Interes na ostatak duga	Otplata	Anuitet
1	$K_1 = K$	$i_1 = K_1 p\%$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$K_2 = K_1 - b_1$	$i_2 = K_2 p\%$	$b_2 = a - i_2$	a
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-1	$K_{n-1} = K_{n-2} - b_{n-2}$	$i_{n-1} = K_{n-1} p\%$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$K_n = K_{n-1} - b_{n-1}$	$i_n = K_n p\%$	$b_n = a - i_n$	a
Ukupno	$\sum_{j=1}^{n} K_j$	$\sum_{j=1}^{n} i_j$	$\sum_{j=1}^{n} b_j$	na

16

Uslovi koje treba da zadovoljava amortizacioni plan otplate kredita jednakim anuitetima

- Uzimajući u obzir analizu i zaključke donete u vezi
  - Iznosa preostalog duga
  - Interesa na ostatak duga
  - Zbira svih interesa i svih otplata

amortizacioni plan otplate kredita jednakim anuitetima je dobro urađen ako zadovoljava:

  - Poslednja otplata b_n je jednaka poslednjem ostatku duga K_n: $K_n = b_n$
  - Zbir svih otplata $b_j, j = 1, 2, \ldots, n$, jednak je zajmu K: $K = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n$
  - $i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-1} + i_n = (K_1 + K_2 + \cdots + K_{n-1} + K_n)p\%$
  - Zbir svih interesa $i_j, j = 1, 2, \ldots, n$, i svih otplata $b_j, j = 1, 2, \ldots, n$, mora biti jednak proizvodu anuiteta a i broja perioda otplaćivanja n:

$$(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n) + (i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}+i_n) = na$$

17

Vrednost anuiteta kojim se kredit amortizuje

- Primetimo da
  - sa jedne strane imamo da se pozajmljeni novac K kapitališe n obračunskih perioda (u ovom slučaju n godina), a
  - sa druge, da se anuiteti a uplaćuju krajem svakog perioda (krajem svake godine) u toku n obračunskog perioda

  sa istom kamatnom stopom p%(d).
- Odatle, imajući u vidu zbir krajnjih vrednosti uloga u slučaju **dekurzivnog ulaganja**, sledi

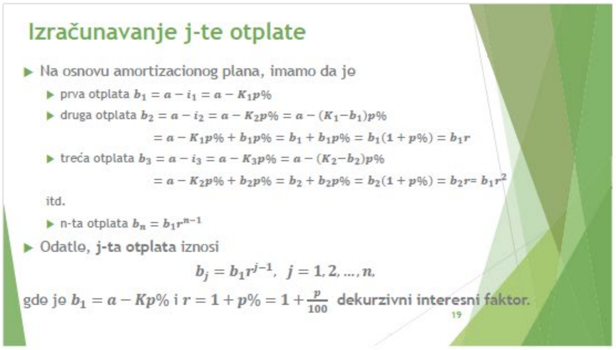
$$Kr^n = a\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

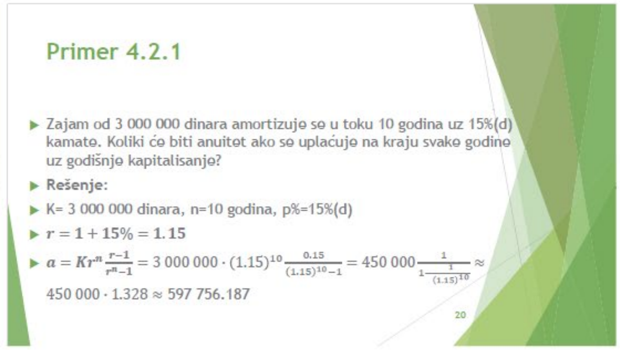
gde je $r = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$ **dekurzivni interesni faktor.**

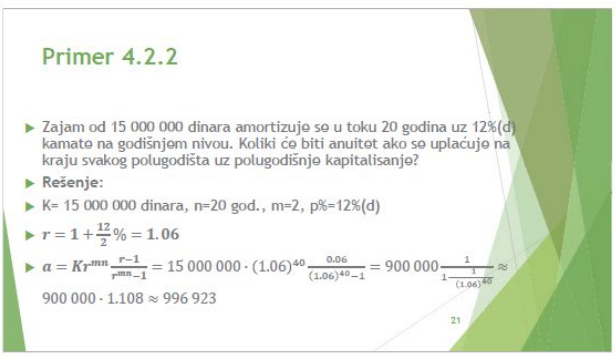
- Iz dobijene jednakosti, anuitet a može se izračunati po formuli

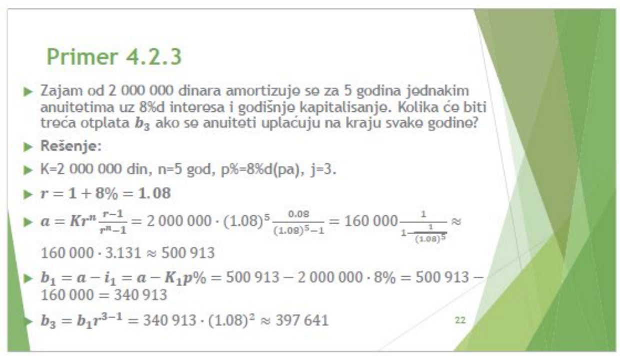
$$a = Kr^n \frac{r - 1}{r^n - 1}$$

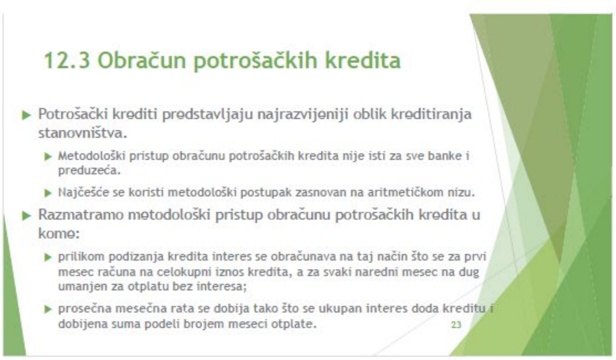
18

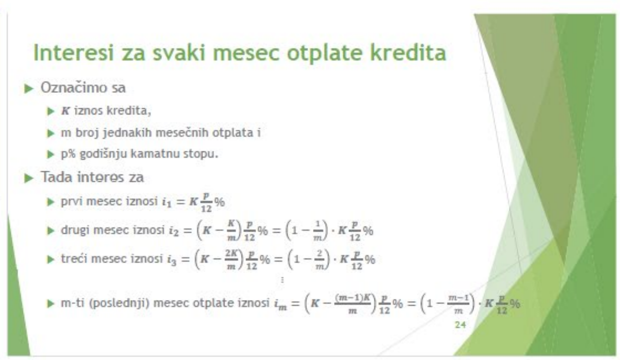

Izračunavanje j-te otplate
Na osnovu amortizacionog plana, imamo da je
prva otplata $b_1 = a - i_1 = a - K_1 p\%$
druga otplata $b_2 = a - i_2 = a - K_2 p\% = a - (K_1 - b_1)p\%$
$= a - K_1 p\% + b_1 p\% = b_1 + b_1 p\% = b_1(1 + p\%) = b_1 r$
treća otplata $b_3 = a - i_3 = a - K_3 p\% = a - (K_2 - b_2)p\%$
$= a - K_2 p\% + b_2 p\% = b_2 + b_2 p\% = b_2(1 + p\%) = b_2 r = b_1 r^2$
itd.
n-ta otplata $b_n = b_1 r^{n-1}$
Odatle, j-ta otplata iznosi
$b_j = b_1 r^{j-1},\ \ j = 1, 2, \ldots, n,$
gde je $b_1 = a - Kp\%$ i $r = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$ dekurzivni interesni faktor.
19


Primer 4.2.1
Zajam od 3 000 000 dinara amortizuje se u toku 10 godina uz 15%(d) kamate. Koliki će biti anuitet ako se uplaćuje na kraju svake godine uz godišnje kapitalisanje?
Rešenje:
K= 3 000 000 dinara, n=10 godina, p%=15%(d)
$r = 1 + 15\% = 1.15$
$a = Kr^n \frac{r-1}{r^n-1} = 3\,000\,000 \cdot (1.15)^{10} \frac{0.15}{(1.15)^{10}-1} = 450\,000 \frac{1}{1-\frac{1}{(1.15)^{10}}} \approx$
$450\,000 \cdot 1.328 \approx 597\,756.187$
20


Primer 4.2.2
Zajam od 15 000 000 dinara amortizuje se u toku 20 godina uz 12%(d) kamate na godišnjem nivou. Koliki će biti anuitet ako se uplaćuje na kraju svakog polugodišta uz polugodišnje kapitalisanje?
Rešenje:
K= 15 000 000 dinara, n=20 god., m=2, p%=12%(d)
$r = 1 + \frac{12}{2}\% = 1.06$
$a = Kr^{mn} \frac{r-1}{r^{mn}-1} = 15\,000\,000 \cdot (1.06)^{40} \frac{0.06}{(1.06)^{40}-1} = 900\,000 \frac{1}{1-\frac{1}{(1.06)^{40}}} \approx$
$900\,000 \cdot 1.108 \approx 996\,923$
21


Primer 4.2.3
Zajam od 2 000 000 dinara amortizuje se za 5 godina jednakim anuitetima uz 8%d interesa i godišnje kapitalisanje. Kolika će biti treća otplata b_3 ako se anuiteti uplaćuju na kraju svake godine?
Rešenje:
K=2 000 000 din, n=5 god, p%=8%d(pa), j=3.
$r = 1 + 8\% = 1.08$
$a = Kr^n \frac{r-1}{r^n-1} = 2\,000\,000 \cdot (1.08)^5 \frac{0.08}{(1.08)^5-1} = 160\,000 \frac{1}{1-\frac{1}{(1.08)^5}} \approx$
$160\,000 \cdot 3.131 \approx 500\,913$
$b_1 = a - i_1 = a - K_1 p\% = 500\,913 - 2\,000\,000 \cdot 8\% = 500\,913 - 160\,000 = 340\,913$
$b_3 = b_1 r^{3-1} = 340\,913 \cdot (1.08)^2 \approx 397\,641$
22


12.3 Obračun potrošačkih kredita
Potrošački krediti predstavljaju najrazvijeniji oblik kreditiranja stanovništva.
Metodološki pristup obračunu potrošačkih kredita nije isti za sve banke i preduzeća.
Najčešće se koristi metodološki postupak zasnovan na aritmetičkom nizu.
Razmatramo metodološki pristup obračunu potrošačkih kredita u kome:
prilikom podizanja kredita interes se obračunava na taj način što se za prvi mesec računa na celokupni iznos kredita, a za svaki naredni mesec na dug umanjen za otplatu bez interesa;
prosečna mesečna rata se dobija tako što se ukupan interes doda kreditu i dobijena suma podeli brojem meseci otplate.
23


Interesi za svaki mesec otplate kredita
Označimo sa
K iznos kredita,
m broj jednakih mesečnih otplata i
p% godišnju kamatnu stopu.
Tada interes za
prvi mesec iznosi $i_1 = K\frac{p}{12}\%$
drugi mesec iznosi $i_2 = \left(K - \frac{K}{m}\right)\frac{p}{12}\% = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot K\frac{p}{12}\%$
treći mesec iznosi $i_3 = \left(K - \frac{2K}{m}\right)\frac{p}{12}\% = \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot K\frac{p}{12}\%$
$\vdots$
m-ti (poslednji) mesec otplate iznosi $i_m = \left(K - \frac{(m-1)K}{m}\right)\frac{p}{12}\% = \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) \cdot K\frac{p}{12}\%$
24

Prosečna mesečna rata potrošačkog kredita

- Odatle, ukupan interes biće jednak zbiru svih interesa

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$
$$= K\frac{p}{12}\% + \left(1 - \frac{1}{m}\right)K\frac{p}{12}\% + \left(1 - \frac{2}{m}\right)K\frac{p}{12}\% + \cdots + \left(1 - \frac{m-1}{m}\right)K\frac{p}{12}\%$$
$$= \left(m - \frac{1}{m}(1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1))\right) \cdot K\frac{p}{12}\% = \left(m - \frac{m(m-1)}{2m}\right) \cdot K\frac{p}{12}\% = \frac{m+1}{2} \cdot K\frac{p}{12}\%$$

odnosno

$$i = K\frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{12}\% = K \cdot k$$

gde je $\mathbf{k} = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{12}\%$ kamatni koeficijent.

- Kada se ovako dobijeni interes doda kreditu i dobijeni zbir podeli brojem meseci otplate dobija se prosečna mesečna rata:

$$b = \frac{K+i}{m}$$

25

Primer 4.3.1

- Kredit od 18 000 dinara otplaćuje se 6 meseci uz 24% kamate. Napraviti otplatni plan i odrediti kolika je mesečna rata.
- **Rešenje:**
- K=18 000 dinara, m=6 meseci, p%=24%d
- $i = K\frac{m+1}{2} \cdot \frac{p}{12}\% = 18\,000\frac{6+1}{2} \cdot \frac{24}{12}\% = 18\,000 \cdot 7 \cdot \frac{1}{100} = 1260$
- $b = \frac{K+i}{m} = \frac{18\,000+1260}{6} = 3000 + 210 = 3\,210$ **dinara** je prosečna mesečna rata.

26

Primer 4.3.1 - otplatni plan gde je prosečna mesečna rata 3 210 dinara

Na kraju meseca	Iznos preostalog duga	Interes na ostatak duga	Otplata	
	18 000	$i_j = \frac{7-j}{6} \cdot 360 = (7-j) \cdot 60$		
1	15 000	360	3000	3360
2	12 000	300	3000	3300
3	9 000	240	3000	3240
4	6 000	180	3000	3180
5	3 000	120	3000	3120
6	0	60	3000	3060
Ukupno	-	$\sum_{j=1}^{n} i_j = 1260$	18 000	19 260

27

Literatura

1. Branislav Boričić, Miodrag Ivović, Mirjana Ilić, Jelena Stanojević (2020): *Matematika*, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
2. Ivana Kovačević, Ana Savić (2006): *Poslovna matematika*, Viša elektrotehnička škola, Beograd.
3. Jelena Kočović (2001): *Finansijska matematika*, Centar za izdavačku delatnost, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
4. Dragica Krgović, Milena Jelić, Boško Damjanović (1992): *Zbirka zadataka iz matematike*, II deo, Naučna knjiga, Beograd.

28