AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek za medicinske i poslovno-tehnološke studija

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

8 Integralni račun

8.1 Neodređeni integral

8.2 Metode integracije

8.3 Određeni integral

8.4 Metode integracije kod određenog integrala

8.5 Nesvojstveni integrali

8.6 Primene integralnog računa

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Kvantitativne metode Poslovna matematika

8 Integralni račun
8.1 Neodređeni integral
8.2 Metode integracije
8.3 Određeni integral
8.4 Metode integracije kod određenog integrala
8.5 Nesvojstveni integrali
8.6 Primene integralnog računa

Predavač: mr Tatjana Bajić

8.1 Neodređeni integral

- Primitivna ili prvobitna funkcija
- Definicija neodređenog integrala
- Osobine neodređenog integrala
- Tablica neodređenih integrala nekih elementarnih funkcija
- Osnovna pravila integracije

Primitivna ili prvobitna funkcija

- Neka je funkcija $f(x)$ definisana na intervalu (a, b).
- Diferencijabilna funkcija $F(x)$, $x \in (a, b)$ zove se **primitivna** ili **prvobitna funkcija funkcije** $f(x)$ ako i samo ako je
$$F'(x) = f(x),\ x \in (a, b).$$
- Za proizvoljnu konstantu C,
  - ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b),
  - tada je i bilo koja funkcija oblika $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$, jer
$$(F(x) + C)' = f(x)$$
- Odatle, **primitivna funkcija nije jednoznačno određena** već je u pitanju familija krivih $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ koje se međusobno razlikuju za konstantu C.

Definicija neodređenog integrala

- Neka je funkcija $f(x)$ definisana na intervalu (a, b).
- Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ zove se **neodređen integral** i označava se sa:
$$\int f(x)dx.$$
- Funkcija $f(x)$ zove se **podintegralna funkcija** (integrand), dok je $f(x)dx$ **podintegralni izraz.**
- Postupak dobijanja familije primitivnih funkcija $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ funkcije $f(x)$, što kraće zapisujemo u obliku
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

naziva se integriranje (intergracija).

Osobine neodređenog integrala

- Ako je $F(x)$ primitivna funkcija na intervalu (a, b) tada je $F(x)$ neprekidna na tom intervalu.
- Svaka neprekidna funkcija $f(x)$ na intervalu (a, b) ima na tom intervalu primitivnu funkciju $F(x)$, odnosno svaka neprekidna funkcija $f(x)$ je izvod neke funkcije $F(x)$.
- Diferencijal neodređenog integrala jednak je diferencijalu primitivne funkcije:
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$
jer $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$.
- Neodređen integral diferencijala jednak je podintegralnoj funkciji:
$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Tablica neodređenih integrala nekih elementarnih funkcija

$\int dx = x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tg\, x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq (-1)$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctg\, x + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0$	
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \begin{cases} arctg\, x + C \\ -arcctg\, x + C \end{cases}$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Osnovna pravila integracije

- Neka su $F(x)$ i $G(x)$ primitivne funkcije redom funkcija $f(x)$ i $g(x)$ na nekom intervalu. Tada je:
  - $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}, k \neq 0$
  - $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
- Primeri:
  - $\int \frac{2}{1+x^2}dx = 2arctgx + C$
  - $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,\ x \neq \pm 1$

7

8.2 Metode integracije

- Metode smene
- Metode parcijalne integracije
- Integracija racionalnih funkcija
- Integracija nekih iracionalnih funkcija

8

Metoda smene

- Neka je $f(x) = f(g(t))$ složena funkcija promenljive t, gde je funkcija $g(t)$:
  - neprekidna funkcija sa neprekidnim izvodom i
  - inverznom funkcijom $t = g^{-1}(x)$.
- Uvođenjem smene $x = g(t)$ dobijamo

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

- Posle integracije, novu promenljivu t treba, pomoću smene $t = g^{-1}(x)$, vratiti na staru promenljivu x.
- Primer: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{1+x} + C,\ x > (-1)$,

  smena: $x = t - 1$ odnosno $t = 1 + x$

9

Metoda parcijalne integracije

- Ako su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne funkcije, tada važi

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

koju nazivamo formulom parcijalne integracije.

- Kod proizvoda:
  - polinoma i eksponencijalne funkcije ili polinoma i trigonometrijske funkcije, za funkciju $u = u(x)$ uzima se polinom (na primer, $\int (x+1)e^x dx, \int x \cdot cosx\, dx$).
  - polinoma i logaritamske funkcije ili polinoma i inverzne trigonometrijske funkcije, za funkciju $u = u(x)$ se uzima logaritamske funkcije, odnosno inverzna trigonometrijska funkcija (na primer, $\int 2x \cdot lnxdx, \int (x-3)arctgx\, dx$).
  - inverzne trigonometrijske i eksponencijalne funkcije, svejedno je šta je funkcija $u = u(x)$.

10

Integracija racionalnih funkcija

- Neka je $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ racionalna funkcija, gde je
  - n - stepen polinoma $P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_n\, x^n,\ p_n \neq 0$
  - m - stepen polinoma $Q_n(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_m\, x^m,\ q_m \neq 0.$
- Ako je $n \geq m$, odnosno funkcija $f(x)$ **je neprava racionalna funkcija**, tada deljenjem polinoma $P_n(x)$ sa polinomom $Q_n(x)$, funkciju $f(x)$ možemo prikazati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije u obliku:

$$f(x) = P(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

- Primer: $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3} = x - 3 + \frac{6x^2+8x+3}{(x+1)^3}.$

11

Integracija prave racionalne funkcije

- Ako je $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ prava racionalna funkcija, odnosno $n < m$, tada se $f(x)$ može rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka oblika:

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$$

  - pri čemu prvi tip razlomka $\frac{A}{(x-a)^k}$ potiče od realnih, a
  - drugi tip $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$ od kompleksnih nula

polinoma $Q_m(x)$ u imeniocu funkcije $f(x)$. Odatle, problem se svodi na rešavanje integrala oblika

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx \text{ i } \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}dx$$

gde su A i B realne konstante koje treba odrediti, $k \in \mathbb{N}$, a kvadratni trinom $x^2 + bx + c$ ima konjugovano kompleksne nule.

12

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Polinom u imeniocu $Q_m(x)$ ima realne i jednostruke nule

- Ako su nule polinoma $Q_m(x)$, racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, realni i međusobno različiti brojevi $x_1, x_2, \dots, x_m$, onda se funkcija $f(x)$ može napisati u obliku:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)}$$

koji omogućuje da se dobijeni izraz može rastaviti u formi

$$\frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A_m}{(x-x_m)}$$

iz koga se mogu izračunati nepoznati koeficijenti $A_1, A_2, \dots, A_m$.

- Odatle, u ovom slučaju integral $\int f(x)dx$ se može odrediti na sledeći način:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{A_1}{(x-x_1)}dx + \int \frac{A_2}{(x-x_2)}dx + \dots + \int \frac{A_m}{(x-x_m)}dx$$

13

Polinom u imeniocu $Q_m(x)$ ima realne i višestruke nule

- Ako su nule polinoma $Q_m(x)$, racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, realne i višestruke tako da je $x = x_1$ nula reda k_1, $x = x_2$ nula reda $k_2, \dots, x = x_m$ nula reda k_m, onda se funkcija $f(x)$ može napisati u obliku:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)} + \frac{A_{21}}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A_{m1}}{(x-x_m)^{k_m}} + \frac{A_{m2}}{(x-x_m)^{k_m-1}} + \dots + \frac{A_{mk_m}}{(x-x_m)}$$

iz koga se mogu izračunati nepoznati koeficijenti A_{ij}, $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, 2, \dots, k_i$

- Odatle, u ovom slučaju integral $\int f(x)dx$ se može odrediti na sledeći način:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \int \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^{k_i-j+1}}dx$$

- Primer: $f(x) = \frac{6x^2+8x+3}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}$

14

Polinom u imeniocu $Q_m(x)$ ima kompleksne i jednostruke nule

- Ako su nule polinoma $Q_m(x)$, racionalne funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kompleksne bez višestrukosti, onda se funkcija $f(x)$ može napisati u obliku:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)\cdot\ldots\cdot(x^2+a_mx+b_m)}$$
$$= \frac{A_1x+B_1}{(x^2+a_1x+b_1)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+a_2x+b_2)} + \dots + \frac{A_mx+B_m}{(x^2+a_mx+b_m)}$$

iz koga se mogu izračunati nepoznati koeficijenti $A_i, B_i, i = 1, 2, \dots m$.

- Odatle, u ovom slučaju integral $\int f(x)dx$ se može odrediti na sledeći način:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \sum_{i=1}^{m} \int \frac{A_ix+B_i}{(x^2+a_ix+b_i)}dx$$

- Integrali oblika $\int \frac{A_ix+B_i}{(x^2+a_ix+b_i)}dx$ se rešavaju metodom smene.

15

Integracija nekih iracionalnih funkcija

- Integrali oblika

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx,\ \frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$$

svode se na integrale racionalne funkcije po promenljivoj t uvođenjem smene:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \text{ odnosno } x = \frac{t^kd-b}{a-t^kc},\ dx = \left(\frac{t^kd-b}{a-t^kc}\right)' dt$$

pri čemu je broj k najmanji zajednički imenilac razlomaka $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

- Primer: $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

16

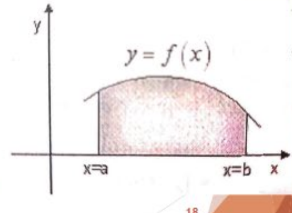
8.3 Određeni integral

- Pojam određenog integrala
- Uslovi postojanja određenog integrala
- Osobine određenog integrala
- Njutn-Lajbnicova formula

17

Krivolinijski trapez

- Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na intervalu $[a, b]$.
- Krivolinijski trapez predstavlja figuru ograničenu:
  - Ox osom
  - neprekidnom nenegativnom funkcijom $f(x)$,
  - pravama $x = a$ i $x = b$.
- Osnovica krivolinijskog trapeza je interval $[a, b]$.



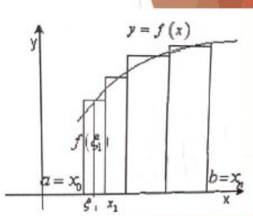
18

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Podela krivolinijskog trapeza

- Tačkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ podelimo interval $[a, b]$ na n proizvoljnih delova.
- Označimo sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dužine podintervala $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- U svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i)$ izaberemo proizvoljnu tačku ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ i formiramo proizvode $\Delta x_i\, f(\xi_i)$ koji predstavljaju površine pravougaonika čije su stranice Δx_i i $f(\xi_i)$.



19

Definicija određenog intervala

- Uočimo zbir površina svih ovako dobijenih pravougaonika:

$$S_n = \Delta x_1\, f(\xi_1) + \Delta x_2\, f(\xi_2) + \cdots + \Delta x_n\, f(\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\, f(\xi_i)$$

- Ako, nezavisno od podele intervala $[a, b]$ na n delova i izbora tačaka ξ_i, i=1,2,…,n, postoji granična vrednost

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\, f(\xi_i) = I$$

granicu integralnih suma nazivamo **određenim integralom** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ i simbolički ga obeležavamo:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

20

Integrabilnost funkcije

- Kod određenog integrala

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

  - funkciju $f(x)$ nazivamo podintegralnom funkcijom ili integrandom, a
  - broj a nazivamo donjom, a broj b gornjom granicom integrala.
- Ukoliko određen integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ postoji i konačan je, odnosno

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| < \infty$$

za funkciju $f(x)$ kažemo da je integrabilna na intervalu $[a, b]$.

21

Uslovi postojanja određenog integrala

- Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, tada je $f(x)$ ograničena na tom intervalu. Obratno ne važi.
- Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$, tada je $f(x)$ integrabilna na tom intervalu.
- Ograničena funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ sa konačnim brojem prekida je $f(x)$ integrabilna na tom intervalu.

22

Osobine određenog integrala

- $\int_a^a f(x)dx = 0.$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C = const.,\ C \neq 0.$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- Ako tačka **c** deli interval $[a, b]$ na dva dela, $a < c < b$, tada važi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

što geometrijski predstavlja sabiranje površina.

23

Njutn-Lajbnicova formula

- Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$, a $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, odnosno $F'(x) = f(x)$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Njutn-Lajbnicovom formulom izražava se veza između određenog i neodređenog integrala.
- Na taj način dobila se opšta metoda za rešavanje određenih integrala i mogućnost njihove primene u različitim oblastima nauke i prakse.

24

8.4 Metode integracije kod određenog integrala

- Metoda smene kod određenog integrala
- Metoda parcijalne integracije kod određenog integrala

25

Metoda smene kod određenog integrala

- Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$.
  - Uvodemo smenu $x = g(t)$.
  - Ako funkcija $g(t)$ ima neprekidan izvod na intervalu $[\alpha,\beta]$, gde je $a = g(\alpha)$ i $b = g(\beta)$, tada

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

- Kod određenog integrala, uvođenjem smene menjaju se granice integracije tako da $\alpha = g^{-1}(a)$ i $\beta = g^{-1}(b)$.
- Primer: $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = 2 - \frac{\pi}{2}$

26

Metoda parcijalne integracije kod određenog integrala

- Ako su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne funkcije na intervalu $[a,b]$, a $v(x)du(x)$ je integrabilna, tada važi:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\,|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

- Primer: $\int_{-1}^1 (1-x^2)e^x dx = \frac{4}{e}$

27

8.5 Nesvojstveni integrali

Integrali kod kojih

- granice nisu konačne - **Integrali sa beskonačnim granicama** ili
- podintegralna funkcija nije ograničena - **Integrali neograničenih funkcija**

nazivaju se **nesvojstveni integrali**.

28

Integrali sa beskonačnim granicama Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,\infty)$

- Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a,\infty)$.
- Ako postoji granična vrednost $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$, onda se ona naziva **nesvojstveni integral** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,\infty)$, odnosno

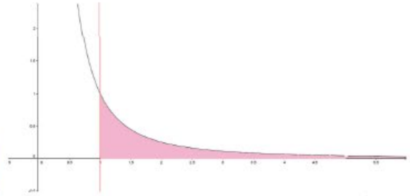
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

- Ako je ova granična vrednost konačna, nesvojstveni integral konvergira, inače divergira.

29

Primer 1

- $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)|_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$



30

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Integrali sa beskonačnim granicama Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $(-\infty, b]$

- Geometrijski, nesvojstveni integral definiše neograničenu površinu oivičenu lukom krive $f(x)$, pravom $x = a$ i x - osom.
- Analogno se definiše **nesvojstveni integral** funkcije $f(x)$ na intervalu $(-\infty, b]$, odnosno

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

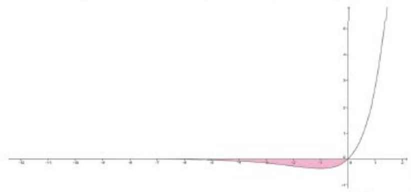
- Ako su obe granice integracije beskonačne tada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

31

Primer 2

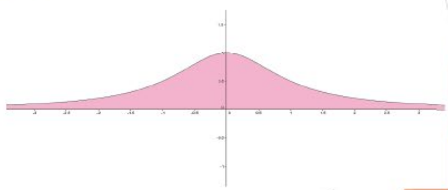
- $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to\infty} (xe^x - e^x) |_t^0 = \lim_{t\to-\infty} e^x(x-1) |_t^0 = (-1)$
- Naravno, površina bi bila apsolutna vrednost (jer je kriva ispod x-ose).



32

Primer 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} (arctgx) |_a^b = \lim_{b\to+\infty} arctgb - \lim_{a\to-\infty} arctga$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



Integrali neograničenih funkcija - I slučaj

- Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $(a, b]$ i $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
- Ako postoji granična vrednost $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, onda se ona naziva nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, odnosno

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

- Primer: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$

34

Integrali neograničenih funkcija - II slučaj

- Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b)$ i $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$.
- Ako postoji granična vrednost $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, onda se ona naziva nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, odnosno

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

- Primer: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$

35

Integrali neograničenih funkcija - III slučaj

- Neka je funkcija $f(x)$ neograničena u okolini tačke $c \in [a, b]$ tada se **nesvojstveni integral** definiše sa

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

- Primer: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \infty$

36

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

8.6 Primene integralnog računa

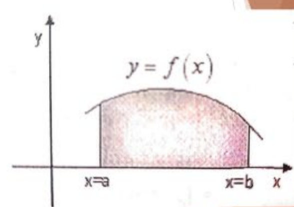
- Izračunavanje površine ravne figure
- Izračunavanje zapremine obrtnih tela

37

Izračunavanje površine ravne figure - I slučaj

- Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i **nenegativna** funkcija na intervalu $[a,b]$, onda površina ograničena x - osom, grafikom funkcije $f(x)$, pravama $x=a$ i $x=b$, iznosi

$$P=\int_a^b f(x)dx$$

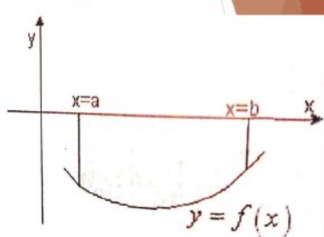


38

Izračunavanje površine ravne figure - II slučaj

- Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i **negativna** funkcija na intervalu $[a,b]$, onda površina ograničena x - osom, grafikom funkcije $f(x)$, pravama $x=a$ i $x=b$, iznosi

$$P=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$



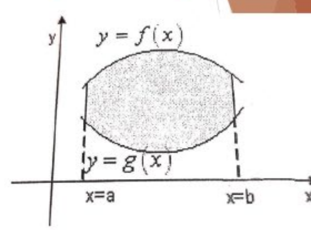
39

Izračunavanje površine ravne figure - III slučaj

- Ako je oblast ograničena graficima neprekidnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$, $f(x)\geq g(x)$ na intervalu $[a,b]$ i pravama $x=a$ i $x=b$, tada je površina razlika površina dva krivolinijska trapeza:

$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

$$=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

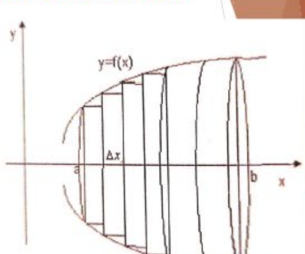


40

Izračunavanje zapremine obrtnih tela

- Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna i stalnog znaka na intervalu $[a,b]$.
- Zapremina obrtnog tela koje se dobija rotacijom zadate funkcije oko x-ose jednaka je:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$



Primeri

- Izračunati površinu između
  - krive $y=\frac{x^2}{x-1}$, x - ose i pravih $x=2$ i $x=3$
  - krive $y=\frac{x^2}{e^x}$, x - ose i prave $x=1$
  - krive $y=\frac{x^2+6x+9}{x+1}$, x - ose i pravih $x=0$ i $x=1$.

42

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek za medicinske i poslovno-tehnološke studija

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

9 Kombinatorika/Procentni račun

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Kvantitativne metode
Poslovna matematika

9 Kombinatorika/Procentni račun

- 9.1 Njutnova binomna formula
- 9.2 Kombinatorika
- 9.3 Procentni račun

Predavač: mr Tatjana Bajić

1

9.1 Njutnova binomna formula

- Faktorijel prirodnog broja
- Binomni koeficijent
- Paskalov trougao

2

Faktorijel prirodnog broja

- **Faktorijel prirodnog broja** $n \in \mathbb{N}$ je proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do n, u oznaci n!, odnosno
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$$
- Po definiciji je: $0! = 1$, $1! = 1$ i $n! = n(n-1)!$.
  - Na primer, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.
- **Dvojni faktorijel prirodnog broja** $n \in \mathbb{N}$, u oznaci n!!, definiše se sa: $0!! = 1$, $1!! = 1$ i $n!! = n(n-2)!!$.
  - Na primer, $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ ili $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$.

3

Binomni koeficijent

- Binomni koeficijent, u oznaci
$$\binom{\alpha}{k}$$
(čita se „alfa nad ka“), gde $\alpha \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$, definiše se sa
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$
  - Na primer, $\binom{-5}{3} = \frac{-5(-5-1)(-5-2)}{3!} = -\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -35$
- Posebno, ako je n prirodan broj ili 0 i $n \geq k$, tada je:
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
  - Na primer, $\binom{5}{3} = \frac{5(5-1)(5-2)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

4

Osobine binomnog koeficijenta

- Ako su $n, k \in \mathbb{N}$ i $n \geq k$, tada:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

5

Njutnova binomna formula

- Ako je $n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, tada je:
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
- Na primer, razvoj binoma 2. i 3. stepena je oblika:

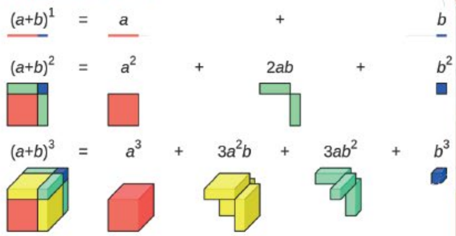
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6

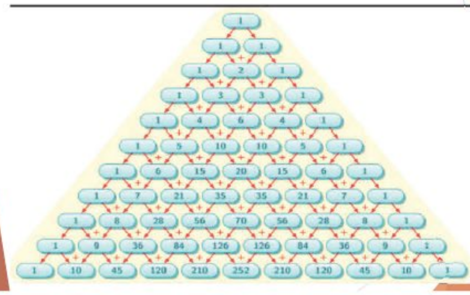
MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Vizuelizacija razvoja binoma do trećeg stepena, a,b>0



Paskalov trougao - vrednosti binomnih koeficijenata



Šest redova Paskalovog trougla u formi binomnih koeficijenata

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

9

Zbir brojeva u pojedinom redu Paskalovog trougla

- Paskalov trougao je posebno uobličen niz binomnih koeficijenta, tj. trougao od niza koeficijenata razvoja binoma $(1+1)^n, n = 0,1,2,3,\dots$:
  - 1. red: $\binom{0}{0} = \mathbf{1} = (1+1)^0 = \mathbf{2^0}$
  - 2. red: $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \mathbf{1+1} = (1+1)^1 = \mathbf{2^1}$
  - 3. red: $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \mathbf{1+2+1} = (1+1)^2 = \mathbf{2^2}$
  - 4. red: $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \mathbf{1+3+3+1} = (1+1)^3 = \mathbf{2^3}$
  - 5. red: $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \mathbf{1+4+6+4+1} = (1+1)^4 = \mathbf{2^4}$

    $\vdots$
  - **n-ti** red: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = \mathbf{2^n}$

10

9.2 Kombinatorika

- Kombinacije, varijacije i permutacije bez ponavljanja (BP)
- Kombinacije, varijacije i permutacije sa ponavljanjem (SP)

11

Kombinacije, varijacije i permutacije bez ponavljanja (BP)

- Neka je dat osnovni skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sa n međusobno različitih elemenata.
- **Definicija 1.1.** Podskup od k elemenata, $1 \le k \le n$, skupa A naziva se **kombinacija bez ponavljanja** (BP) klase k od n elemenata (skupa A).
- **Definicija 1.2.** Uređeni podskup od k elemenata, $1 \le k \le n$, skupa A (uređena k-torka) naziva se **varijacija bez ponavljanja** (BP) klase k od n elemenata (skupa A).
- **Definicija 1.3.** Uređenje čitavog skupa A naziva se **permutacija bez ponavljanja** (BP) od n elemenata (skupa A).

12

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Broj kombinacija, varijacija i permutacija bez ponavljanja

- P_n - broj permutacija bez ponavljanja od n elemenata

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!,\ n \geq 1$$
$$P_0 = 0! = 1$$

- V_n^k - broj varijacija bez ponavljanja klase k od n elemenata

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),\ 1 \leq k \leq n$$
$$V_n^0 = 1$$

- C_n^k - broj kombinacija bez ponavljanja klase k od n elemenata

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},\ 1 \leq k \leq n$$
$$C_n^0 = 1$$

13

Primeri 1.1 - broj permutacija bez ponavljanja od n elemenata

- Koliko ima permutacija bez ponavljanja skupa {a,b,c}?
  - Rešenje: $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1$=6 permutacija BP: abc, acb, bca, bac, cab, cba.
- Koliko permutacija bez ponavljanja skupa {1,2,3,4,5,6,7} počinje sa 36?
  - Rešenje: (7-2)!=5!= 5 · 4 · 3 · 2 · 1= 120 permutacija BP.
- Na koliko načina može da sedne 6-oro dece u redu koji ima šest stolica?
  - Rešenje: Na 6!= 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1= 720 načina.

14

Primeri 1.2 - broj varijacija bez ponavljanja klase k od n elemenata

- Koliko ima varijacija bez ponavljanja klase 2 skupa {a,b,c}?
  - Rešenje: V_3^2 =3 · 2=6 : ab, ac, bc, ba, ca, cb.
- Na koliko različitih načina mogu ući 3 studenta od 7 studenata jedan po jedan u slušaonicu?
  - Rešenje: Na V_7^3 =7 · 6 · 5=210 načina.
- Špil se sastoji od 32 karte. Na koliko načina možemo izvući tri karte iz špila ako već izvađenu kartu ne vraćamo u špil pre vađenja sledeće?
  - Rešenje: Na V_{32}^3 = 32 · 31 · 30 = 29 760 načina.

15

Primeri 1.3 - broj kombinacija bez ponavljanja klase k od n elemenata

- Koliko ima kombinacija bez ponavljanja klase 2 skupa {a,b,c}?
  - Rešenje: $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2!} = \binom{3}{2} = 3$ kombinacije BP: ab, ac, bc.
- Student na ispitu dobije 12 pitanja od kojih mora da odgovori na 9. Na koliko različitih načina student može da odabere tih 9 pitanja?
  - Rešenje: Na $C_{12}^9 = \binom{12}{9} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{9!} = \frac{12!}{9!3!} = \binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!} = 220$ načina.
- Na tacni se nalazi 6 belih i 5 crnih čokoladnih kuglica. Na koliko načina možemo uzeti 4 kuglice ako: a) boja čokolade nije od značaja? b) dve kuglice moraju da budu od bele čokolade, a dve od crne?
  - Rešenje: a) Na $C_{6+5}^4 = \binom{6+5}{4} = \binom{11}{4} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4!} = \mathbf{330}$ načina.

    b) Na $C_6^2 \cdot C_5^2 = \binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2} = \frac{6\cdot 5}{2!}\cdot\frac{5\cdot 4}{2!} = 15\cdot 10 = \mathbf{150}$ načina.

16

Posebno

- Neka je A skup od n elemenata. Odrediti broj elemenata partitivnog skupa od A, odnosno kardinalni broj partitivnog skupa od A.
- Rešenje:
  - Partitivni skup od A je skup svih podskupova od A.
  - Prazan skup je uvek podskup od A i odatle broj podskupova od A koji imaju 0 elemenata je $\binom{n}{0} = 1$.
  - Broj svih jednočlanih podskupova od A je $\binom{n}{1}$.
  - Broj svih dvočlanih podskupova od A je $\binom{n}{2}$.
  - Broj svih tročlanih podskupova od A je $\binom{n}{3}$.

    ⋮
  - Broj svih n-točlanih podskupova od A je $\binom{n}{n}$.
  - Odatle, broj elemenata partitivnog skupa od A je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

17

Kombinacije, varijacije i permutacije sa ponavljanjem (SP)

- Neka je dat osnovni skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sa n međusobno različitih elemenata pri čemu se i-ti element javlja k_i puta, $1 \leq i \leq n$, tako da je $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$.
- **Definicija 2.1. Kombinacija sa ponavljanjem** (SP) **klase k od n elemenata** je kolekcija od k (k > 0) elemenata skupa A, ne obavezno različitih.
- **Definicija 2.2. Varijacija sa ponavljanjem** (SP) **klase k od n elemenata** je uređena kolekcija od k (k > 0) elemenata skupa A, ne obavezno različitih.
- **Definicija 2.3. Permutacija sa ponavljanjem** (SP) **klase m od n različitih elemenata**, pri čemu se i-ti element javlja k_i puta, $1 \leq i \leq n$, tako da je $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$,je **uređenje čitavog skupa od ukupno m elemenata** u kome se elementi istog tipa ne razlikuju.

18

Broj kombinacija, varijacija i permutacija sa ponavljanjem

- $\overline{P}_n^{k_1,k_2,\dots,k_n}$ - broj permutacija sa ponavljanjm od n različitih elemenata pri čemu se i-ti element javlja k_i puta, $1 \le i \le n$, tako da je $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)! = \mathrm{m}! = \overline{P}_n^{k_1,k_2,\dots,k_n} k_1!\,k_2! \cdots k_n!$$

$$\overline{P}_n^{k_1,k_2,\dots,k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\,k_2! \cdots k_n!}$$

- $\overline{V}_n^k$ - broj varijacija sa ponavljanjem klase k od n elemenata

$$\overline{V}_n^k = n \cdot n \cdots n = n^k,\ \mathrm{k} \ge 0,\ \overline{V}_n^0 = 1$$

- $\overline{C}_n^k$ - broj kombinacija sa ponavljanjem klase k od n elemenata (bez ograničenja na broj ponavljanja)

$$\overline{C}_n^k = \overline{P}_2^{k,n-1} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \binom{n-1+k}{k},\ \mathrm{k} \ge 0,\ \overline{C}_n^0 = 1$$

19

Primeri 2.1 - broj permutacija sa ponavljanjem klase m od n različitih elemenata

- Na koliko različitih načina 2 dečaka (M) i 3 devojčice (F) mogu oprati ruke?
  - Rešenje: Na $\overline{P}_2^{2,3} = \frac{(2+3)!}{2!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ načina: MMFFF, MFMFF, MFFMF, MFFFM, FFFMM, FFMFM, FFMMF, FMMFF, FMFMF, FMFFM.
- Na koliko načina možemo 6 igračaka ravnomerno da podelimo na troje dece?
  - Rešenje: Na $\overline{P}_3^{2,2,2} = \frac{(2+2+2)!}{2!2!2!} = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ načina.
- Rezultat fudbalskih utakmica se zapisuje sa 0-nerešeno, 1-pobeda domaćina, 2-pobeda gosta. Rezultat čitavog kola je niz od 12 cifara, gde cifre uzimaju vrednost 0, 1 ili 2. Koliko može biti rezultata čitavog kola ako je bilo 7 pobeda domaćina, 3 nerešene i 2 pobede gosta?
  - Rešenje: $\overline{P}_3^{3,7,2} = \frac{(3+7+2)!}{3!7!2!} = \frac{12!}{3!7!2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6 \cdot 2} = \mathbf{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920}$.

20

Primeri 2.2 - broj varijacija sa ponavljanjem klase k od n elemenata

- Koliko ima varijacija sa ponavljanjem klase 2 skupa {a,b,c}?
  - Rešenje: $\overline{V}_3^2$=3 · 3=9 : aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.
- 32 zuba se svrstavaju u određenom poretku: 0-izvađen zub, 1-nije izvađen zub. Koliko najviše ljudi na svetu može imati različitih stanja svojih zuba?
  - Rešenje: $\overline{V}_2^{32} = 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{32} = \mathbf{4\,294\,967\,296}$ ljudi.
- Špil se sastoji od 32 karte. Na koliko načina možemo izvući tri karte iz špila ako izvađenu kartu vraćamo u špil pre vađenja sledeće?
  - Rešenje: Na $\overline{V}_{32}^3$ = 32 · 32 · 32 = $\mathbf{32^3}$ = 32 768 načina.

21

Primeri 2.3 - broj kombinacija sa ponavljanjem klase k od n elemenata

- Koliko ima kombinacija sa ponavljanjem klase 2 skupa {a,b,c}?
  - Rešenje: $\overline{C}_3^2 = \overline{P}_2^{2,3-1} = \frac{(3-1+2)!}{(3-1)!2!} = \binom{4}{2} = \mathbf{6}$ kombinacije SP: aa, ab, ac, bb, bc, cc.
- Koliko ima kombinacija sa ponavljanjem klase 4 skupa {a,b,c}?
  - Rešenje: $\overline{C}_3^4 = \overline{P}_2^{4,3-1} = \frac{(3-1+4)!}{(3-1)!4!} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \mathbf{15}$ kombinacije SP: aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc, bbbb, bbbc, bbcc, bccc, cccc.
- U autobusu je 10 osoba. Autobus staje na 5 stanica. Na koliko načina osobe mogu izaći na tih 5 stanica u zavisnosti samo od broja njih koji izlaze na različitim stanicama?
  - Rešenje: Na svakoj od 5 stanica izlazi izvestan broj osoba tako da posle 5. stanice izađe svih 10 osoba. U zavisnosti od načina kako su osobe izlazile na stanicama, dobijamo niz od 10 nula i (5-1) jedinice. Odatle, na

$\overline{C}_5^{10} = \overline{P}_2^{10,5-1} = \binom{10+5-1}{10} = \binom{14}{10} = \binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4!} = \mathbf{7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001}$ način.

22

9.3 Procentni račun

- Procenat
- Odnos dela i celine
- Osnovna proporcija procentnog računa

23

Procenat

- **Jedan procenat** je stoti deo neke celine, u oznaci

$$1\% = \frac{1}{100}$$

- Odatle,

$$100\% = \frac{100}{100} = 1$$

- Posebno, u decimalnom zapisu

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

24

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić

Procentni zapis racionalnih brojeva

- Racionalni brojevi mogu se predstaviti u obliku procenta:

$$\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=75\%$$

$$\frac{2}{5}=\frac{40}{100}=40\%$$

$$\frac{3}{2}=\frac{150}{100}=150\%$$

- Obratno,

$$25\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

$$0.50\%=\frac{0.50}{100}=\frac{50}{10000}=\frac{1}{200}$$

$$200\%=\frac{200}{100}=2$$

25

Deo izražen kao izvestan broj stotih delova jednog celog

- Određen broj stotih delova jednog celog označava se sa **p** i izražava se u procentima,

$$\mathbf{p}\%$$

ili u decimalnom zapisu,

$$\mathbf{p}\cdot 0.01$$

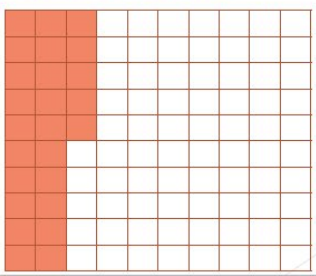
pri čemu je

$$\mathbf{p}\cdot 0.01=\frac{p}{100}=p\%$$

- Primeri
  - $16\%=\frac{16}{100}=16\cdot 0.01=0.16$
  - $5.4\%=\frac{5.4}{100}=\frac{54}{1000}=54\cdot 0.001=0.054$
  - $147\%=\frac{147}{100}=147\cdot 0.01=1.47$

26

Primer: 35%=35/100=0.35



27

Osnovna proporcija procentnog računa Celina : Delu = 100 : p

- **Celina : Delu = 100 : p** odnosno **Celina : Delu = 100% : p%**
- Kako je 100%=1, ukoliko operišemo sa brojevima u decimalnom zapisu, koristi se proporcija **Celina : Delu = 1 : p%.**
- Odatle, **Celina : 100 = Deo : p** odnosno **Celina : 100% = Deo : p%**
- **Procenat**

$$p\%=\frac{Deo}{Celina}\cdot 100\%=\frac{Deo}{Celina}$$

- **Deo**

$$Deo=\frac{Celina}{100}\cdot p=Celina\cdot\frac{p}{100}=Celina\cdot p\%$$

- **Celina**

$$Celina=\frac{Deo}{p}\cdot 100=\frac{Deo}{p\%}$$

28

Primer 1

- Broj zaposlenih u jednom gradu u odnosu na prethodnu godinu se povećao za 40 000 tako da iznosi 200 000. Za koliko procenata se uvećao broj zaposlenih?
- Rešenje:

(200 000 - 40 000) : 100% = 40 000 : p% odnosno

160 000 : 100% = 40 000 : p% što znači

160 000 · p% = 40 000 · 100%

Odatle, $p\%=\frac{40\,000}{160\,000}\cdot 100\%=\frac{4}{16}\cdot 100\%=\frac{1}{4}\cdot 100\%=\frac{100}{4}\%=25\%$.

Broj zaposlenih se uvećao za ¼, odnosno za 25%.

29

Primer 2

- Posle sniženja od 20%, roba se prodaje za 48 000 dinara. Izračunati:
  a) za koliko je dinara snižena cena,
  b) koliko bi iznosila prodajna cena da je sniženje iznosilo 25% od prvobitne cene?
- Rešenje:

a) Prvobitna cena : 100% = 48 000 : (100-20)% odnosno

Prvobitna cena : 100% = 48 000 : 80%, gde je Prvobitna cena=Celina.

Odatle, Prvobitna cena $=\frac{48\,000}{80\%}\cdot 100\%=600\cdot 100=60\,000$ dinara je snižena za 60 000 - 48 000 = 12 000 dinara.

b) 60 000 : 100% = Novoprodajna cena : (100-25)% odnosno

60 000 : 100% = Novoprodajna cena : 75%, gde je Novoprodajna cena=Deo

Odatle, Novoprodajna cena $=60\,000\cdot\frac{75}{100}=600\cdot 75=45\,000$ dinara je prodajna cena da je sniženje iznosilo 25% od prvobitne cene.

30

MATEMATIKA/KVANTITATIVNE METODE/POSLOVNA MATEMATIKA

Predavač: mr Tatjana Bajić