

VEŽBA 1 – Brojevi i izrazi

ARITMETIČKI OPERATORI	
Operacija	Simbol
Sabiranje	+
Oduzimanje	-
Množenje	*
Deljenje s desna	/
Deljenje s leva	\
Stepenovanje	^

RELACIJSKI OPERATORI	
Relacija	Simbol
Manje	<
Manje ili jednako	<=
Veće	>
Veće ili jednako	>=
Jednako	=
Nejednako	~

LOGIČKI OPERATORI	
Operacija	Simbol
Negacija	~
Konjukcija	&
Disjunkcija	

DEFINISANE PROMENLJIVE	
ans	Promenljiva kojoj je dodeljena vrednost poslednjeg izraza (answer)
pi	broj π
eps	Dozvoljena tolerancija greške, odnosno najmanja razlika između dva broja koju može da uoči
Inf	∞ (infinity)
i, j	Imaginarna jedinica
Nan	Nije broj (Not-a-Number)

PRIKAZ REZULTATA	
format long	14 decimala
format short	4 decimale
format long e	Naučna notacija sa 15 decimala
format short e	Naučna notacija sa 4 decimale
format bank	2 decimale
format rat	Razlomak
vpa (a,n)	n značajnih cifara broja a

Primer.

Broj π predstaviti koristeći neke od prethodnih formata

Rešenje:

format long, pi

ans =

3.141592653589793

format short, pi

ans =

3.1416

format rat, pi

ans =

355/113

vpa(pi,7)

ans =

3.141593

NEKE UGRADENE FUNKCIJE	
Funkcija	Opis
mod(a,k)	Ostatak pri deljenju broja a sa k
sqrt(x)	Kvadratni koren od x
exp(x)	Eksponencijalna funkcija
abs(x)	Apsolutna vrednost od x
log(x)	Prirodni logaritam (osnova e)
log10(x)	Logaritam sa osnovom 10
factorial(x)	Faktorijel od x
sin (x)	Sinus ugla x
cos (x)	Kosinus ugla x
tan (x)	Tangens ugla x
cot (x)	Kotangens ugla x

NEKE UGRAĐENE NAREDBE	
Naredba	Opis
<code>syms</code>	pravi simboličke promenljive, pa izrazi nemaju numeričku vrednost u trenutku izvršenja i rezultat je simbolički izraz
<code>simplify()</code>	“pokuša” da uprosti izraz
<code>expand()</code>	“širi” algebarski izraz – množi, primenjuje trigonometrijske formule, itd.
<code>factor()</code>	rastavlja na činioce
<code>pretty()</code>	prikazuje simbolički izraz u čitljivijem formatu

Primer.

Uprostiti izraz :

$$\frac{a^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + b^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) + c^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}{\frac{a}{bc}(c-b) + \frac{b}{ca}(a-c) + \frac{c}{ab}(b-a)}$$

Rešenje:

```
syms a b c;
izraz=(a^2*(1/b-1/c)+b^2*(1/c-1/a)+c^2*(1/a-1/b))/((a/(b*c))*(c-
b)+(b/(c*a))*(a-c)+(c/(a*b))*(b-a)));
simplify(izraz)
```

ans =

a + b + c

Primer.

Izračunati proizvod izraza $a = (x^2 + x + 1)(x - 2)$ i $b = (x^3 + 3x^2 + x + 1)(x + 4)$.

Rešenje:

```
syms x;
a=(x^2+x+1)*(x-2);
b=(x^3+3*x^2+x+1)*(x+4);
expand(a*b)
```

ans =

$x^7 + 6x^6 + 5x^5 - 17x^4 - 28x^3 - 35x^2 - 14x - 8$

Primer.

Rastaviti na činioce:

- a) broj 34562 napisati kao proizvod prostih brojeva
- b) izraz $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
- c) faktorisati polinom $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

Rešenje:

a)

```
factor(34562)
```

ans =

```
2      11      1571
```

b)

```
syms a b c;  
factor(a^2+2*a*b+b^2-c^2)
```

ans =

```
[ a + b - c, a + b + c]
```

c)

```
syms x;  
factor(x^5-3*x^4-5*x^3+15*x^2+4*x-12)
```

ans =

```
[ x - 1, x - 2, x - 3, x + 2, x + 1]
```

VEŽBA 2 – Matrice i vektori

MATRICE SPECIJALNIH STRUKTURA	
eye(n)	jedinična m-ca $n \times n$
eye(m,n)	jedinična m-ca $m \times n$
eye(size(A))	jedinična m-ca dimenzija m-ce A
zeros(dimenzija m-ce)	nula m-ca
ones(dimenzija m-ce)	m-ca sa svim jedinicama
magic(dimenzija m-ce)	magična matrica
rand(dimenzija m-ce)	matrica čiji su elementi slučajni brojevi sa uniformnom raspodelom
randn(dimenzija m-ce)	matrica čiji su elementi slučajni brojevi sa standardnom normalnom raspodelom
diag(a)	Ako je a vektor formira kvadratnu matricu sa elementima na glavnoj dijagonali jednakim vektoru a
diag(A)	Ako je A matrica formira vektor od elemenata njene glavne dijagonale.

FORMIRANJE NEKIH SPECIJALNIH VEKTORA	
početna vrednost : korak : krajnja vrednost	generisanje prema razmaku između (susednih) elemenata
linspace(početna vred., krajnja vred., broj elemenata)	generisanje prema broju elemenata

NEKE UGRADENE FUNKCIJE	
Funkcija	Opis
det(A)	Determinant m-ce A
inv(A)	Inverzna m-ca m-ce A
sum()	suma (sabira elemente vektora ili sabira elemente po kolonama u matrici)
prod()	proizvod
min()	najmanji element
max()	najveći element
mean()	srednja vrednost
harmmean	harmonijska sredina
geomean()	geometrijska sredina
mode()	mod
median()	medijana

Primer.

Za datu matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ odrediti:

- a) dimenziju m-ce
- b) determinantu
- c) transponovanu m-cu
- d) inverznu m-cu
- e) formirati m-cu $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- f) izvojiti elemente druge vrste matrice A
- g) izdvojiti elemente treće kolone m-ce A i od tih elemenata formirati dijagonalnu m-cu C
- h) zameniti element (1,3) m-ce C sa 2
- i) $A+B$, $A-2C+3I$
- j) Uočiti razliku između $A*B$ i $A.*B$

Rešenje:

$A = [3, -4, 5; 0, -3, 1; 0, 0, -1];$

a)

$[m,n] = \text{size}(A)$

m =

3

n =

3

b)

$\det(A)$

ans =

9

c)

A'

ans =

3 0 0
-4 -3 0

```

5      1      -1

```

d)

```
inv(A)
```

```
ans =
```

```

0.3333    -0.4444    1.2222
      0    -0.3333   -0.3333
      0         0   -1.0000

```

```
format rat, ans
```

```
ans =
```

```

1/3          -4/9          11/9
0          -1/3         -1/3
0              0           -1

```

```
format
```

e)

```
B=diag(diag(A))
```

```
B =
```

```

3      0      0
0     -3      0
0      0     -1

```

f)

```
A(2,:)
```

```
ans =
```

```

0      -3      1

```

g)

```
C=diag(A(:,3))
```

```
C =
```

```

5      0      0
0      1      0
0      0     -1

```

h)

```
C(1,3)=2
```

```
C =
```

```

5      0      2

```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i)

A+B

ans =

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 5 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A-2*C+3*eye(3)

ans =

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

j)

A*B % množenje m-ca po definiciji

ans =

$$\begin{bmatrix} 9 & 12 & -5 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.*B % pojedinačno množenje odgovarajućih elemenata

ans =

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer.

Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 10 & k & 1 & -6 \\ -1 & 3 & 2 & k \\ k & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Rešenje:

```
syms k
K=[10 k 1 -6; -1 3 2 k; k 2 1 -1; 1 1 -1 -1];
det(K)
```

ans =

$k^3 + k - 30$

factor(ans)

ans =

[k - 3, k² + 3*k + 10]

Primer.

Formirati vektor

- a) a – parnih brojeva iz interval [10,20] u opadajućem nizu i odrediti dužinu
a1 – kvadrata parnih brojeva iz interval [10,20]
- b) b – ravnomerno raspoređenih pet elemenata iz intervala [0,10]
- c) c – nadovezivanjem vektora b na vektor a
odrediti najveći i najmanji element vektora c, mod, medijanu, kao i sumu i srednju
vrednost elemenata vektora c

Rešenje:

a)

a=20:-2:10

a =

20 18 16 14 12 10

length(a)

ans =

6

a1=a.^2

a1 =

400 324 256 196 144 100

b)

b=linspace(0,10,5)

b =

0 2.5000 5.0000 7.5000 10.0000

c)

c=[a,b];

max(c)

ans =

20

min(c)

ans =

0

mode(c)

ans =

10

median(c)

ans =

10

sum(c)

ans =

115

mean(c)

ans =

10.4545

VEŽBA 3 – Grafici funkcija

Crtanje grafa 1D funkcija

CRTANJE GRAFIKA	
plot (x)	na ordinati su indeksi elemenata vektora, a na apscisi sami elementi
plot (x,y)	grafik y u odnosu na x
plot (x,y,'vrsta linije marker boja')	Vrsta linije (-, -. , : , -- , itd.) Marker (* , + , x , o , itd.) Boja (r-red, g-green, b-blue, y-yellow, itd)
plot (x1,y1,x2,y2)	više linija na istom grafiku
subplot(m,n,p)	deli ekran na mxn delova i u p-tom crta grafik funkcije
ezplot(funkcija,[a,b])	Simbolički zadata f-ja na intervalu [a,b]

OZNAČAVANJE GRAFIKA
title ('naziv grafika')
xlabel ('naziv x-ose'), ylabel ('naziv y-ose')
text ('tekst na grafiku')
gtext ('tekst na grafiku') – mišem označimo mesto na grafiku gde želimo da bude tekst
legend (' prvi element legende', 'drugi',...)
grid – crtanje mreže

Naredba hold on zadržava sliku na ekranu, dok je suprotna njoj naredba hold off

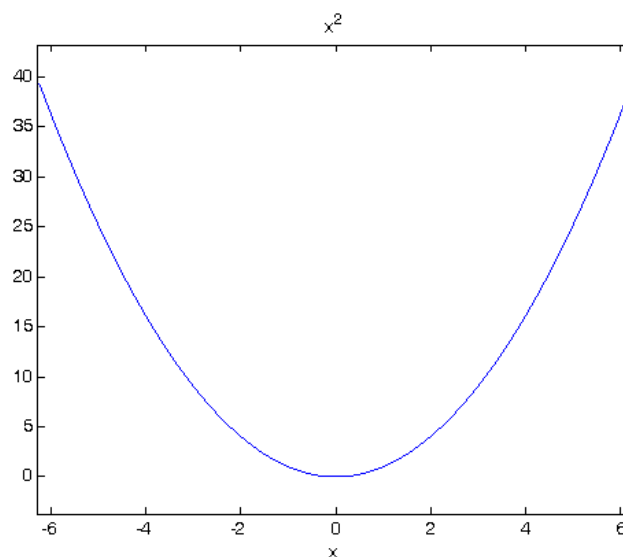
Primer.

Grafički predstaviti funkciju: $y = x^2$.

Rešenje:

I način:
`x=-20:0.1:20;`
`y=x.^2;`
`plot(x,y)`

II način:
`syms x`
`f=x^2;`
`ezplot(f)`



Primer.

Grafički predstaviti funkciju $\sin x$ i $\cos x$ u istom prozoru.

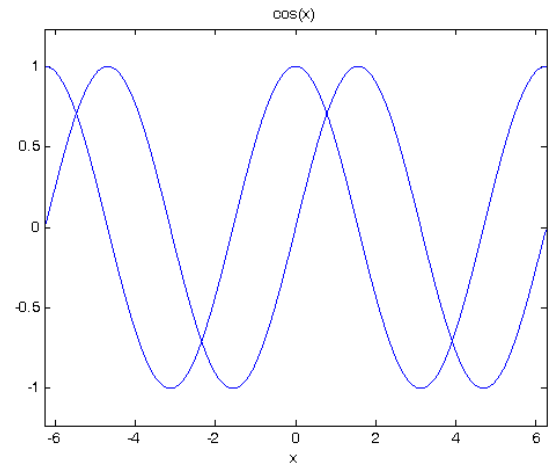
Rešenje:

I način:

```
x=0:0.1:2*pi;  
y1=sin(x);  
y2=cos(x);  
plot(x,y1,x,y2)
```

II način:

```
syms x;  
y1=sin(x);  
y2=cos(x);  
figure(1); ezplot(y1)  
figure(2); ezplot(y1); hold on; ezplot(y2)
```



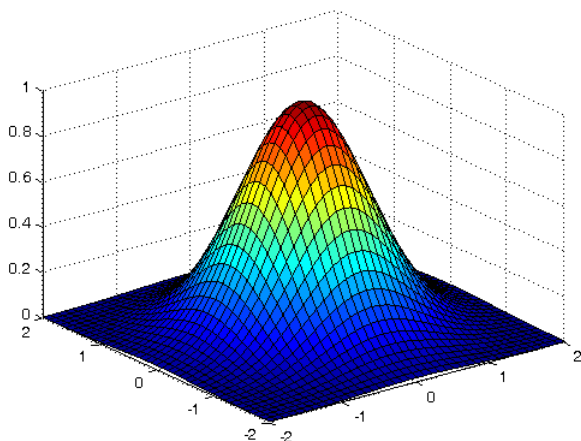
Crtanje grafa 2D funkcija

Primer.

Grafički predstaviti funkciju: $z(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ domenu $D = [-2, 2] \times [-2, 2]$ sa korakom $k = 0.1$.

Rešenje:

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2, -2:0.1:2);  
z=exp(-(x.^2+y.^2));  
surf(x,y,z)
```



VEŽBA 4 - M-fajlovi i naredbe

Naredba for služi za ponavljanje niza naredbi unapred zadati broj puta.

```
for promenljiva=pocetna vrednost:korak:krajnja vrednost
    niz naredbi
end
```

Naredba while izvršava se dok je uslov zadovoljen

```
while logički uslov
    niz naredbi
end
```

Naredba if...else slična je naredbi while jer se takođe koristi za ponavljanje niza naredbi sve dok je zadovoljen određeni uslov.

```
if logički izraz
    naredbe1
else
    naredbe2
end
```

M-fajlovi

Niz naredbi može da se čuva u fajlu sa datim imenom i estenzijom .m - to su **script fajlovi**. Izvršava se u MATLAB-u navođenjem imena fajla.

Primer.

Kreirati fajl *faktorijel10.m* koji računa $n!$ za $n=10$.

Rešenje:

```
p=1;
for k=1:10
    p=p*k;
end
p

>>faktorijel10
p =

    3628800
```

Posebna vrsta m - fajlova su **funkcijski fajlovi** u kojima se definišu nove funkcije sa ulaznim i izlaznim parametrima.

```
function [izlazne_varijable]=ime_funkcije(ulazne_varijable)

    naredbe

end
```

Primer.

Kreirati funkcijski fajl *faktorijel(n)* koji računa $n!$, gde je n ulazni podatak.

Rešenje:

```
function [ p ] = faktorijel( n )
p=1;
for k=1:n
    p=p*k;
end
end
```

```
>> faktorijel(5)
```

```
ans =
```

```
120
```

Primer.

Napisati program *zbirfaktorijela* koji računa zbir faktorijela prvih n prirodnih brojeva (iskoristiti funkcijski fajl iz prethodnog primera).

Rešenje:

```
n=input('Unesite n:');
s=0;
for k=1:n
    s=s+faktorijel(k);
end
s
```

```
>> zbirfaktorijela
Unesite n:4
```

```
s =
```

```
33
```

Primer.

Kreirati fajl *fibbr.m* koji sadrži naredbe za određivanje i crtanje Fibonačjevih brojeva-1,1,2,3,5,8,... manjih od 100.

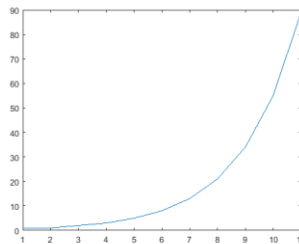
Rešenje:

```
fb=[1 1];  
i=1;  
while fb(i)+fb(i+1)<100  
    fb(i+2)=fb(i)+fb(i+1);  
    i=i+1;  
end  
fb, plot(fb)
```

```
>> fibbr
```

fb =

	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
89										



Primer.

Kreirati funkcijski fajl *slucajnamatrica.m* čiji su elementi slučajni brojevi od 0 do 10.

Rešenje:

```
function [ A ] = slucajnaMatrica( m,n )  
A=round(10*rand(m,n));  
end
```

```
>>A=slucajnaMatrica(5,3)
```

A =

7	8	4
0	7	4
3	3	8
0	10	8
1	0	2

Primer.

Napisati program koji za uneti vektor računa zbir parnih i proizvod neparnih brojeva.

a) Kreirati fajl *SumaProizvod.m*

```
a=input('Unesite vektor a:');
[m,n]=size(a);
if m~=1
    error('Niste uneli vektor')
else
    suma=0;
    proizvod=1;
    for k=1:n
        if(mod(a(k),2)==0)
            suma=suma+a(k);
        else
            proizvod=proizvod*a(k);
        end
    end
end
suma, proizvod
```

```
>>SumaProizvod
Unesite vektor a:[1:5]
```

a =

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

suma =

6

proizvod =

15

b) Kreirati funkcijski fajl *SP.m*

```
function [suma,proizvod] = SP( a )
[m,n]=size(a);
if m~=1
    error('Niste uneli vektor')
else
    suma=0;
    proizvod=1;
    for k=1:n
        if(mod(a(k),2)==0)
            suma=suma+a(k);
        else
            proizvod=proizvod*a(k);
        end
    end
end
```



```
end  
end  
end
```

```
>>[suma,proizvod]=SP([1:5])
```

```
suma =
```

```
6
```

```
proizvod =
```

```
15
```

VEŽBA 5 – Izvodi i integrali

IZVODI I INTEGRALI	
Funkcija	Opis
diff (f, x, n)	n-ti izvod simbolički zadate funkcije f po x
int(f,x)	Neodređeni integral f-je f $\int f(x)dx$
int(f,x,a,b)	Određeni integral f-je f na intervalu [a,b] $\int_a^b f(x)dx$

Primer.

Naći prvi i drugi izvod funkcije: $y = \frac{x^3}{1-x^3}$.

Rešenje:

```
syms x;  
y=x^3/(1-x^3);  
y1=diff(y) % ili y1=diff(y,x)
```

y1 =

$$(3*x^5)/(x^3 - 1)^2 - (3*x^2)/(x^3 - 1)$$

```
simplify(y1)
```

ans =

$$(3*x^2)/(x^3 - 1)^2$$

```
pretty(ans)
```

$$\frac{x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

```
y2=diff(y,2) % ili y2=diff(y,x,2) ili y2=diff(y1)
```

y2 =

$$(24*x^4)/(x^3 - 1)^2 - (6*x)/(x^3 - 1) - (18*x^7)/(x^3 - 1)^3$$

```
simplify(y2)
```

ans =

$$-(6*x*(2*x^3 + 1))/(x^3 - 1)^3$$

pretty(ans)

$$-\frac{6x(2x^3 + 1)}{(x^3 - 1)^3}$$

Primer.

Odrediti parcijalne izvode f-je ako je:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

Rešenje:

```
syms x y;  
f=x^3+y^3-6*x*y;  
fx=diff(f,x)
```

fx =

$$3*x^2 - 6*y$$

```
fy=diff(f,y)
```

fy =

$$3*y^2 - 6*x$$

```
fxx=diff(fx,x)
```

fxx =

$$6*x$$

```
fyy=diff(fy,y)
```

fyy =

$$6*y$$

```
fxy=diff(fx,y)
```

fxy =

$$-6$$

`fyx=diff(fy,x)`

`fyx =`

`-6`

Primer.

Odrediti integral: $\int x^3 e^{3x} dx$.

Rešenje:

```
syms x;  
f=x^3*exp(3*x);  
int(f) % ili int(f,x)
```

`ans =`

`(exp(3*x)*(27*x^3 - 27*x^2 + 18*x - 6))/81`

Primer.

Izračunati: $\int_{-1}^3 ((7x+7) - (-x^2+3x+4)) dx$.

Rešenje:

```
syms x;  
f=(7*x+7)-(-x^2+3*x+4)
```

`f =`

`x^2 + 4*x + 3`

`int(f,-1,3) % ili int(f,x,-1,3)`

`ans =`

`112/3`

VEŽBA 6 – Sistem linearnih jednačina

Primer.

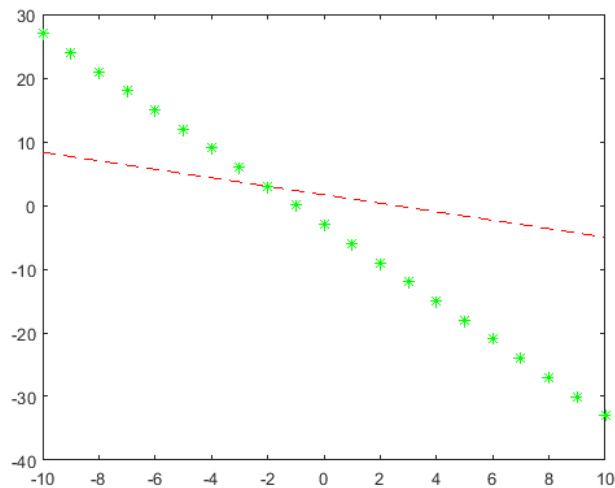
Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$2x + 3y = 5$$

$$3x + y = -3$$

- a) grafički
- b) matrično
- c) pomoću f-je solve()
- d) Kramerovim pravilom

a)
`x=-10:1:10;`
`y1=(5-2*x)/3;`
`y2=-3-3*x;`
`plot(x,y1,'r--',x,y2,'g*')`



b)
`A=[2,3;3,1];`
`b=[5,-3]';`
`x=inv(A)*b`

`x =`

```
-2.0000
 3.0000
```

`x=A\b`

`x =`

$$\begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$$

c)

```
syms x y;
[x,y]=solve([2*x+3*y==5,3*x+y==-3],[x,y])
```

x =

-2

y =

3

d)

```
function [ X ] = KramerovoPravilo( A,b )
[m,n] = size(A);
if m~=n
error('Matrica nije kvadratna')
end
if det(A) == 0
error('Matrica je singularna')
end
for j = 1 : n
C = A;
C(:, j) = b;
X(j) = det(C)/det(A);
end
X = X';
end
```

```
>>KramerovoPravilo(A,b)
```

ans =

```
-2.0000
 3.0000
```