# Glava 15

# DISKRETNA VEROVATNOĆA

## 15.1 Algebra događaja

Skup svih ishoda nekog eksperimenta zovemo prostor elementarnih događaja i označavamo sa $\Omega$. Elemente skupa $\Omega$ zovemo elementarni događaji, a podskupove skupa $\Omega$ zovemo događaji. Siguran događaj je skup $\Omega$, a nemoguć događaj je prazan skup $\emptyset$. $A \subseteq B$ znači da realizacija događaja $A$ povlači realizaciju događaja $B$. $A = B$ akko je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Suprotan događaj od događaja $A$ je događaj $\bar{A}$ koji se realizuje ako i samo ako se ne realizuje događaj $A$. Unija događaja $A$ i $B$ je događaj $A \cup B$ koji se realizuje ako se realizuje bar jedan od događaja $A, B$. Presek(proizvod) događaja $A$ i $B$ je događaj $A \cap B$ koji se realizuje ako se realizuju i događaj $A$ i događaj $B$. Događaji $A$ i $B$ su nesaglasni(disjunktni) ako se ne mogu istovremeno realizovati. Uvedene operacije na skupu $P(\Omega)$ imaju sve osobine odgovarajućih skupovnih operacija. Kolekcija(familija) događaja $\mathcal{F}$ prostora elementarnih događaja $\Omega$ zove se polje događaja ili $\sigma$-polje ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$(i)$ $\Omega \in \mathcal{F}$,

$(ii)$ $(\forall A)(A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{F})$,

$(iii)$ Ako je $\{A_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$, onda i $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Za familiju $\mathcal{F}$, čiji su elementi događaji prostora elementarnih događaja $\Omega$, kažemo da je indukovana prostorom $\Omega$. Familije $\{\emptyset, \Omega\}$ i $P(\Omega)$ su minimalno, odnosno maksimalno polje događaja. Familija $\mathcal{F}$ ima sledeća svojstva:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(2) $(\forall A)(\forall B)(A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$.

## 15.2 Verovatnoća

Neka je $\mathcal{F}$ sigma polje indukovano prostorom elementarnih događaja $\Omega$ i $R$ skup realnih brojeva. Funkcija $P : \mathcal{F} \longrightarrow R$ za koju važi:

(1) $P(\Omega) = 1$,

(2) $P(A) \geqslant 0$ za $A \in \mathcal{F}$,

(3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum\limits_i P(A_i)$ ako su događaji $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ uzajamno isključivi, pri čemu događaja $A_i$ može da bude konačno ili prebrojivo mnogo,

naziva se verovatnoćom nad poljem $\mathcal{F}$.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ naziva se prostorom verovatnoće.
Verovatnoća $P$ događaja iz $\mathcal{F}$ ima sledeće osobine:

(1) $P(\emptyset) = 0$,

(2) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,

(3) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$,

(4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$,

$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Uslovna verovatnoća događaja $A$, pod uslovom da se realizovao događaj $B$, $P(B) \neq 0$, definiše se sa

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ .$$

Za događaje $A$ i $B$ kažemo da su nezavisni ako je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ .$$

Iz definicije uslovne verovatnoće se dobija:

(1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$,

(2) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A\cap B}(C)$.

Ako se uvek realizuje jedan i samo jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ iz $\Omega$, onda za $A \subseteq \Omega$ važi:

$$(1) \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(A),$$

$$(2) \quad P_A(A_j) = \frac{P(A_j) \cdot P_{A_j}(A)}{P(A)}.$$

Prva formula se zove formula totalne verovatnoće a druga Bajesova formula.

Specijalno, kada je prostor elementarnih događaja $\Omega$ konačan i svi elementarni događaji tog prostora imaju jednake verovatnoće, nazivamo ga prostorom jednakih verovatnoća. U ovom slučaju elementarni događaji, koji dovode do realizacije događaja $A$, zovu se povoljni događaji za događaj $A$. Ako je $m$ broj svih povoljnih događaja za događaj $A$, a $n$ broj svih elementarnih događaja prostora $\Omega$, onda je

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

## 15.3 Slučajna promenljiva

Funkcija $X$, koja preslikava skup elementarnih događaja $\Omega$ u skup realnih brojeva $R$, naziva se slučajna promenljiva. Ako je $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, kažemo da slučajna promenljiva $X$ uzima vrednosti $x_1, x_2, \ldots$ Ako je $X(\Omega)$ konačan ili prebrojiv skup realnih brojeva, kažemo da je $X$ diskretna slučajna promenljiva, a ako je $X(\Omega)$ interval realnih brojeva, kažemo da je $X$ neprekidna slučajna promenljiva. Označimo sa $X = x_k$ događaj da slučajna promenljiva $X$ uzme vrednost $x_k \in X(\Omega)$, a sa $p_k = P(x_k) = P(X = x_k)$ verovatnoću tog događaja. Neka je $X$ diskretna slučajna promenljiva. Skup

$$\{(x_k, P(x_k)) | x_k \in X(\Omega)\}$$

naziva se zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive, pri čemu je $\sum\limits_{k=1}^{n} P(x_k) = 1$ za $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, odnosno $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(x_k) = 1$ za $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dalje ćemo, osim ako posebno naglasimo, razmatrati samo prostore verovatnoće kod kojih je $X(\Omega)$ konačan skup. Šematski se zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive može prikazati na sledeći način:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \dots & P(x_n) \end{pmatrix}, \text{ ili } X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ P(x_1) & P(x_2) & \dots \end{pmatrix}.$$

Pomoću tačaka $(x_k, P(x_k))$ možemo u ravni konstruisati poligon raspodele verovatnoća slučajne promenljive $X$. Verovatnoću događaja da slučajna promenljiva $X$ uzima vrednosti manje od $x \in R$ nazivamo funkcija raspodele verovatnoća slučajne promenljive $X$ i pišemo

$$F(x) = P(X < x).$$

Funkcija raspodele verovatnoća je definisana za sve $x \in R$. Neka je $F$ funkcija raspodele slučajne promenljive $X$. Tada važi sledeće:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ za svako $x \in R$,

(2) $F$ je monotono neopadajuća funkcija,

(3) Funkcija $F$ je neprekidna sa leve strane u svakoj tački $x \in R$.

Neka je $X$ slučajna promenljiva nad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je $\Omega$ konačan skup i $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Matematičko očekivanje slučajne promenljive $X$ je broj

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(x_i).$$

Disperzija slučajne promenljive $X$ je broj

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - M(X))^2 P(x_i).$$

Posmatrajmo eksperiment u kome se može realizovati događaj $A$ sa verovatnoćom $P(A) = p$ ili njemu suprotan događaj $\bar{A}$ sa verovatnoćom $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Označimo sa $X$ slučajnu promenljivu koja predstavlja broj realizacija događaja $A$ pri $n$ uzastopnih nezavisnih eksperimenata, u kojima se događaj $A$ ostvaruje sa konstantnom verovatnoćom $p$. Slučajna promenljiva $X$ tada može uzeti sve celobrojne vrednosti od 0 do $n$, pa imamo da je

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p_n(k)$$

Ova slučajna promenljiva se zove binomna slučajna promenljiva i kažemo da ima binomni zakon raspodele. Njena funkcija raspodele je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum\limits_{k<x} p_n(k), & 0 < x \leq n \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

Za binomnu slučajnu promenljivu važi

$$M(X) = np \quad \text{i} \quad \sigma^2(X) = npq.$$

## 15.4 Zakon velikih brojeva

Ne može se unapred predvideti koju će od mogućih vrednosti uzeti slučajna promenljiva u jednom konkretnom eksperimentu, ali skupno dejstvo mnogih slučajnih okolnosti može dovesti do rezultata koji skoro da ne zavisi od slučaja.

*Teorema Čebiševa* Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzajamno nezavisne (po parovima) slučajne promenljive sa istim matematičkim očekivanjem $a$, i ako su njihove disperzije ravnomerno ograničene (ne prelaze konačan broj $C$), ma kako bio mali broj $\varepsilon > 0$, verovatnoća nejednačine

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

biće proizvoljno bliska jedinici, ako je broj slučajnih promenljivih dovoljno veliki, tj.

$$\lim_{n\to\infty} P\left( \left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

*Teorema Bernulija* Ako je u svakom od $n$ nezavisnih eksperimenata verovatnoća $p$ realizacije događaja $A$ konstantna, to će odstupanje relativne učestanosti od verovatnoće $p$ biti po apsolutnoj vrednosti proizvoljno malo, sa verovatnoćom proizvoljno blisko jedinici, ako je broj ogleda $n$ dovoljno veliki.

Drugim rečima, ako je $\varepsilon$ proizvoljno mali pozitivan broj, to, pod uslovima navedenim u teoremi, važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\left( \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

## 15.5 Zadaci

**Zadatak 427** *Bacaju se istovremeno dve kocke. Naći verovatnoću sledećih događaja:*

*a) Zbir dobijenih poena je* 8.

*b) Proizvod dobijenih poena je* 8.

*c) Zbir dobijenih poena je veći od proizvoda dobijenih poena.*

**Zadatak 428** *Naći verovatnoću da se u dva uzastopna bacanja dveju kocki dobije prvi put zbir* 8, *a drugi put* 10.

**Zadatak 429** *U jednoj kutiji ima* 18 *zelenih,* 16 *plavih i* 14 *belih kuglica. Kolika je verovatnoća da će se u tri uzastopna izvlačenja dobiti prvi put bela, drugi i treći put plava kuglica ako se izvučena kuglica:*
*a) vraća u kutiju;*
*b) ne vraća u kutiju?*

**Zadatak 430** *Iz kompleta od* 52 *karte izvlače se istovremeno četiri karte. Naći verovatnoću da sve izvučene karte budu različitih boja.*

**Zadatak 431** *U kutiji se nalazi* 5 *belih,* 6 *crnih i* 7 *plavih kuglica. Istovremeno se izvlači iz kutije* 6 *kuglica. Naći verovatnoću da je među izvučenim kuglicama* 1 *bela,* 2 *crne i* 3 *plave kuglice.*

**Zadatak 432** *Novčić se baca* 3 *puta. Naći verovatnoću da je grb pao tačno* 2 *puta.*

**Zadatak 433** *Dva strelca gađaju cilj. Prvi strelac pogađa cilj u* 70% *slučajeva, a drugi u* 40% *slučajeva. Naći verovatnoću da je cilj pogođen.*

**Zadatak 434** *Tri strelca istovremeno gađaju cilj. Verovatnoća da prvi strelac pogodi cilj je* $0,8$; *drugi* $0,3$ *i treći* $0,2$. *Naći verovatnoću da je cilj pogođen.*

**Zadatak 435** *Kolika je verovatnoća da se dobije zbir* 14*, ako se bace tri kocke?*

**Zadatak 436** *Iz špila od* 52 *karte izvlače se istovremeno četiri karte. Odrediti verovatnoću dogadjaja da se medju izvučenim kartama nalazi:*
*a) tačno jedna tref karta,*
*b) bar jedna tref karta,*
*c) sve četiri tref karte,*
*d) ni jedna tref karta.*

**Zadatak 437** *Student zna* 85 *od* 100 *pitanja. Na ispitu se izvlači cedulja sa tri pitanja. Ako su pitanja nezavisna, naći verovatnoću događaja da student izvuče cedulju na kojoj:*
*a) zna sva tri pitanja,*
*b) ne zna ni jedno pitanje,*
*c) zna bar dva pitanja.*

**Zadatak 438** *Mašina radi u normalnom režimu u* 80% *slučajeva i u nezadovoljavajućem režimu u* 20% *slučajeva. Verovatnoća da mašina otkaže za vreme rada u normalnom režimu je* $0,1$ *a u nezadovoljavajućem je* $0,7$*. Kolika je verovatnoća da će mašina otkazati?*

**Zadatak 439** *Na stolu se nalaze tri jednake kutije. U prvoj kutiji se nalazi a belih i b crnih kuglica, u drugoj c belih i d crnih kuglica, a u trećoj su samo bele kuglice. Iz jedne od kutija se vadi jedna kuglica. Naći verovatnoću da ona bude bela.*

**Zadatak 440** *Na stolu su dve kutije - u prvoj se nalazi a belih i b crnih kuglica, a u drugoj c belih i d crnih kuglica. Iz prve kutije prebaci se u drugu jedna kuglica, pa se onda iz druge vadi jedna kuglica. Naći verovatnoću da ona bude bela.*

**Zadatak 441** *Iz kutije koja sadrži* 3 *bele i* 2 *crne kuglice prebačene su dve slučajno izabrane kuglice u kutiju koja sadrži* 4 *bele i* 4 *crne kuglice. Naći verovatnoću da se posle toga iz druge kutije izvuče bela kuglica .*

**Zadatak 442** *Službenik odlazi na posao autobusom, tramvajem ili trolejbusom sa verovatnoćama* $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$*, redom. Ako putuje autobusom stiže na vreme sa verovatnoćom* $\frac{1}{6}$*, tramvajem* $\frac{1}{2}$ *i trolejbusom* $\frac{9}{10}$*. Ako je službenik stigao na vreme, odrediti verovatnoću da je putovao trolejbusom.*

**Zadatak 443** *U prodavnici se prodaju akumulatori proizvedeni u* 4 *fabrike:* 500 *akumulatora iz I fabrike,* 1050 *akumulatora iz II fabrike,* 550 *akumulatora iz III fabrike,* 1900 *akumulatora iz IV fabrike.*
*Verovatnoća da akumulator traje više od* 5 *godina iznosi* 0,20 *za I fabriku,* 0,25 *za* $II$, 0,30 *za* $III$ *i* 0,10 *za IV fabriku. Ako slučajno izabrani akumulator traje duže od* 5 *godina, kolika je verovatnoća da je proizveden u* $II$ *fabrici?*

**Zadatak 444** *Kocka je bačena* 6 *puta. Kolika je verovatnoća dogadjaja:*

*a) Neće pasti ni jedna šestica,*

*b) pašće tačno jedna šestica,*

*c) pašće bar jedna šestica,*

*d) pašće svih šest šestica.*

**Zadatak 445** *Verovatnoća da se u jednoj porodici rodi sin je* 0,5*. Ako ta porodica ima desetoro dece, odrediti verovatnoću dogadjaja:*
*a) ima tačno pet sinova;*
*b) broj sinova je izmedju* 3 *i* 7.

**Zadatak 446** *Na prijemnom ispitu kandidati odgovaraju na* 20 *pitanja. Za svako pitanje ponuđeno je pet odgovora od kojih je samo jedan tačan. Kolika je verovatnoća da učenik koji na svako pitanje slučajno bira odgovor, tačno odgovori na sva pitanja?*

**Zadatak 447** *Košarkaš izvodi slobodna bacanja na koš. Bacanja su nezavisna i verovatnoća pogotka u svakom bacanju je* 0,8*. Odrediti verovatnoću da će košarkaš imati* 2 *pogotka iz* 3 *bacanja.*

**Zadatak 448** *U jednom gradu verovatnoća za jednog stanovnika da bude smeđ, crn, plav i riđ je redom* 0.3, 0.2, 0.4 *i* 0.1*. Slučajno je izabrana grupa od šest ljudi. Kolika je varovatnoća da su u grupi bar tri plavokosa?*

**Zadatak 449** *Ako bacimo novčić* 10 *puta, kolika je verovatnoća da će pasti grb najviše dva puta?*

**Zadatak 450** *Ako bacimo novčić* 10 *puta, kolika je verovatnoća da će pasti grb bar dva puta ?*

**Zadatak 451** *Dat je zakon raspodele slučajne promenljive*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p^2 & 2p & 0,32 & p^2+p \end{pmatrix}.$$

*Odrediti* $P$, $M(X)$, $\sigma^2(X)$.

**Zadatak 452** *Na putu kretanja automobila su četiri semafora. Svaki od njih sa verovatnoćom* $p = 0,4$ *dozvoljava, a sa verovatnoćom* $q = 0,6$ *zabranjuje dalje kretanje. Opisati slučajnu promenljivu* $X$ *koja predstavlja broj semafora pored kojih je automobil prošao do prvog zaustavljanja.*

**Zadatak 453** *U kutiji se nalazi* 5 *crvenih i* 5 *plavih kuglica. Na slučajan način bez vraćanja, izabrane su tri kuglice. Slučajna promenljiva* $X$ *predstavlja broj crvenih kuglica među izabranim. Odrediti zakon i funkciju raspodele slučajne promenljive* $X$.

**Zadatak 454** *Baca se novčić dok se dva puta uzastopno ne pojavi pismo, ili dok se ne izvrši pet bacanja. Odrediti zakon i funkciju raspodele slučajne promenljive* $X$, *koja predstavlja broj izvedenih bacanja.*

**Zadatak 455** *Slučajna promenljiva* $X$ *označava zbir dobijenih poena pri bacanju dve kocke. Odrediti raspodelu i matematičko očekivanje te slučajne promenljive.*

**Zadatak 456** *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

**Zadatak 457** *Bačena su tri novčića. Odrediti zakon raspodele i matematičko očekivanje slučajne promenljive koja predstavlja broj dobijenih grbova.*

**Zadatak 458** *Iz kutije, koja sadrži* 3 *crne i* 4 *bele kuglice, izvlači se po jedna kuglica bez vraćanja do pojave bele kuglice. Naći matematičko očekivanje broja izvučenih crnih kuglica.*

**Zadatak 459** *U kutiji se nalazi* 2 *bele i* 3 *crne kuglice. Nasumice se tri puta izvlači po jedna kuglica sa vraćanjem. Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive* $X$ *koja predstavlja broj izvučenih crnih kuglica.*

**Zadatak 460** *Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

*i njeno matematičko očekivanje.*

**Zadatak 461** *Bačena je kocka. Neka je slučajna promenljiva $X$ broj tačkica na gornjoj strani kocke. Odrediti zakon raspodele, matematičko očekivanje, disperziju i funkciju raspodele slučajne promenljive $X$.*

## 15.6 Rešenja

**Rešenje 427** $a)\ \dfrac{5}{36}\ ,\quad b)\ \dfrac{1}{18}\ ,\quad c)\ \dfrac{11}{36}$

**Rešenje 428** $P(A)=\dfrac{5}{36}\cdot\dfrac{3}{36}=\dfrac{5}{432}$

**Rešenje 429**

$a)\ P(A)=\dfrac{14}{48}\cdot\dfrac{16}{48}\cdot\dfrac{16}{48}=\dfrac{7}{216}$

$b)\ P(B)=\dfrac{14}{48}\cdot\dfrac{16}{47}\cdot\dfrac{15}{46}=\dfrac{35}{1081}$

**Rešenje 430** $P(A)=1\cdot\dfrac{39}{51}\cdot\dfrac{26}{50}\cdot\dfrac{13}{49}=\dfrac{2197}{20825}$

**Rešenje 431** $P(A)=\dfrac{C_1^5\cdot C_2^6\cdot C_3^7}{C_6^{18}}=\dfrac{125}{884}$

**Rešenje 432** $\dfrac{3}{8}$

**Rešenje 433** $P(A)=0,7;\ P(B)=0,4;$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,82$$

**Rešenje 434** $P(A)=0,8;\ P(B)=0,3;\ P(C)=0,2;$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0,888\end{aligned}$$

**Rešenje 435** $P(A) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

**Rešenje 436**

$$a)\ P(A) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{3}}{\binom{52}{4}},$$

$$b)\ P(B) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{3}+\binom{13}{2}\binom{39}{2}+\binom{13}{3}\binom{39}{1}+\binom{13}{4}\binom{39}{0}}{\binom{52}{4}} = 1-\frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}},$$

$$c)\ P(C) = \frac{\binom{13}{4}\binom{39}{0}}{\binom{52}{4}} = \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}},$$

$$d)\ P(D) = \frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}}.$$

**Rešenje 437**

$$a)\ P(A) = \frac{\binom{85}{3}}{\binom{100}{3}},\quad b)\ P(B) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{100}{3}},\quad c)\ P(C) = \frac{\binom{85}{2}\binom{15}{1}+\binom{85}{3}}{\binom{100}{3}}.$$

**Rešenje 438** Označimo sa $A$ događaj - mašina će otkazati i sa $A_1$ i $A_2$ događaje da mašina radi u normalnom, odnosno nezadovoljavajućem režimu. Tada je $P(A_1) = 0,8;\ P(A_2) = 0,2;\ P(A \mid A_1) = 0,1$ i $P(A \mid A_2) = 0,7;$ pa je

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A \mid A_1) + P(A_2)\cdot P(A \mid A_2) = 0,22.$$

**Rešenje 439** Označimo hipoteze: $A_1$ - izbor prve kutije, $A_2$ - izbor druge, $A_3$ - izbor treće kutije. Tada je

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}\ ,$$

$$P(A \mid A_1) = \frac{a}{a+b}\ ,\ P(A \mid A_2) = \frac{c}{c+d}\ \text{ i }\ P(A \mid A_3) = 1\ ,$$

pa je

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)\cdot P(A \mid A_1) + P(A_2)\cdot P(A \mid A_2) + P(A_3)\cdot P(A \mid A_3) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\Big). \end{aligned}$$

**Rešenje 440** Neka je $A_1$ dogadjaj prebacivanja bele kuglice, a $A_2$ prebacivanje crne. Tada je
$P(A_1)=\frac{a}{a+b}, P(A_2)=\frac{b}{a+b}, P(A \mid A_1)=\frac{c+1}{c+d+1}, P(A \mid A_2)=\frac{c}{c+d+1}$
pa je

$$P(A) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1}.$$

**Rešenje 441** Neka je $A_1$ događaj - prebacivanja dve bele kuglice, $A_2$ - jedne bele i jedne crne i $A_3$ - dve crne kuglice. Tada je

$$P(A_1) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10},\ P(A_2) = \frac{3\cdot 2}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5},\ P(A_3) = \frac{1}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10},$$

$$P(A \mid A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},\ P(A \mid A_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},\ P(A \mid A_3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

pa je

$$P(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5} = 0,52.$$

**Rešenje 442**

$$P(A_1) = \frac{2}{3},\ P(A_2) = \frac{1}{4},\ P(A_3) = \frac{1}{12},$$

$$P(A \mid A_1) = \frac{1}{6},\ P(A \mid A_2) = \frac{1}{2},\ P(A \mid A_3) = \frac{9}{10},$$

$$P(A) = \frac{14}{45},\ P(A_3 \mid A) = \frac{P(A_3) \cdot P(A \mid A_3)}{P(A)} = \frac{27}{112}.$$

**Rešenje 443**

$P(A_1) = \frac{500}{4000},\ P(A_2) = \frac{1050}{4000},\ P(A_3) = \frac{550}{4000},\ P(A_4) = \frac{1900}{4000},$
$P(A \mid A_1) = 0,20;\ P(A \mid A_2) = 0,25;\ P(A \mid A_3) = 0,30;$
$P(A \mid A_4) = 0,10;$

$$P(A) = \frac{287}{1600},\ P(A_2 \mid A) = \frac{P(A_2) \cdot P(A \mid A_2)}{P(A)} = \frac{15}{41}$$

**Rešenje 444**

*a)* $P_6(0) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6$

*b)* $P_6(1) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5$

*c)* $1 - P_6(0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$

*d)* $P_6(6) = \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^6$

**Rešenje 445**

*a)* $P_{10}(5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$

*b)* $P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) = \frac{\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6}}{2^{10}}$

**Rešenje 446** $P_{20}(20) = \binom{20}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{20}\left(\frac{4}{5}\right)^0 = \left(\frac{1}{5}\right)^{20}$

**Rešenje 447** $P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^1 = 0,384$

**Rešenje 448**

$$\begin{aligned} P(A) &= 1-(P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)) \\ &= 1-(0,6^6+6\cdot 0,4\cdot 0,6^5+15\cdot 0,4^2\cdot 0,6^4) \end{aligned}$$

**Rešenje 449**

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2) \\ &= \binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9+\binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= \frac{7}{128} \end{aligned}$$

**Rešenje 450** $P(A)=1-(P_{10}(0)+P_{10}(1))=1-11\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

**Rešenje 451** $P^2+2P+0,32+P^2+P=1,\quad P=0,2;$
$M(X)=1,76;\ \sigma^2(X)=0,7424$

**Rešenje 452**

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,6 & 0,24 & 0,096 & 0,0384 & 0,0256 \end{pmatrix}.$$

**Rešenje 453**

$$P(X=0)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12},$$

$$P(X=1)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=2)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=3)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12},$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{12}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

**Rešenje 454**

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{4}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{3}{8}, & 3 < x \leq 4 \\ \frac{1}{2}, & 4 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

**Rešenje 455**

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}, \quad M(X) = 7$$

**Rešenje 456** $M(X) = 0,3 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 2 = 1,1$

$$\sigma^2(X) = (0 - 1,1)^2 \cdot 0,3 + (1 - 1,1)^2 \cdot 0,3 + (2 - 1,1)^2 \cdot 0,4 = 0,69$$

**Rešenje 457**

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad M(X) = \frac{3}{2}$$

**Rešenje 458** $P(X=0)=\frac{4}{7},\ \ P(X=1)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{7},$
$P(X=2)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{35},\ P(X=3)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{35}$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{35} & \frac{1}{35} \end{pmatrix},\quad M(X)=\frac{3}{5}$$

**Rešenje 459**

$$P(X=0)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{125},$$
$$P(X=1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{36}{125}$$
$$P(X=2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$$
$$P(X=3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{125},$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{125} & \frac{36}{125} & \frac{54}{125} & \frac{27}{125} \end{pmatrix},\quad M(X)=\frac{9}{5}$$

**Rešenje 460**

$$F(X)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ 0,2, & 1<x\le 2 \\ 0,3, & 2<x\le 3 \\ 0,7, & 3<x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases},\quad M(X)=2,8$$

**Rešenje 461**

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},\quad M(X)=\frac{7}{2},\ \ \sigma^2(X)=\frac{35}{12}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{3}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 < x \leq 4 \\ \frac{2}{3}, & 4 < x \leq 5 \\ \frac{5}{6}, & 5 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$